

【コース ID : 49】 基礎数学 AII

49.9 三角比

49.9.1 三角比

問題 001 (バリエーション No.1)

$$\sin 0^\circ = \boxed{\text{ア}} \text{ である.}$$

原点 O を中心とした半径 1 の単位円周上に点 P をとったとき, P の座標を (x, y) , OP と x 軸との成す角を θ とすると

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta$$

である. $\theta = 0^\circ$ のとき, P は x 軸上にあるので $\sin \theta = 0$ である.

【答】 0

問題 002 (バリエーション No.1)

$$\tan 60^\circ = \sqrt{\boxed{\text{ア}}} \text{ である.}$$

原点 O を中心とした半径 1 の単位円周上に点 P を OP と x 軸の成す角が 60° となるようにとる.
さらに点 Q を $(1, 0)$ の位置にとると, $OP=OQ=1$, $\angle POQ=60^\circ$ より三角形 OPQ は正三角形である.
P の座標を (x, y) とすると, 点 $(x, 0)$ は OQ の中点となるから $x = \frac{1}{2}$ となることがわかる.
また P は単位円周上にあることから

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y > 0 \text{ より } y = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ である. よって}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ より } \tan 60^\circ = \sqrt{3} \text{ である.}$$

【答】 $\sqrt{3}$

問題 003 (バリエーション No.1)

$$\sin 30^\circ = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \text{ である.}$$

原点 O を中心とした半径 1 の単位円周上に点 P を OP と x 軸の成す角が 30° となるようにとる.
さらに点 Q を点 P と x 軸に関して対称の位置にとる. すなわち P の座標を (x, y) としたとき, Q の座標が $(x, -y)$ となるようにとる.
このとき, $OP=OQ=1$, $\angle POQ=2 \times 30^\circ = 60^\circ$ より三角形 OPQ は正三角形である.
 $PQ=2y=1$ より $y = \frac{1}{2}$. よって $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ である.

【答】 $\frac{1}{2}$

問題 004 (バリエーション No.1)

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}} \text{である.}$$

一般に $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ であり, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ であるから

$$\cos^2 30^\circ = 1 - \sin^2 30^\circ = \frac{3}{4}$$

$\cos 30^\circ > 0$ より $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である.

【答】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

問題 005 (バリエーション No.1)

$$\tan 120^\circ = \boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}} \text{である.}$$

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

であり,

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

であるから $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$ となる.

【答】 $-\sqrt{3}$

問題 006 (バリエーション No.1)

$$\cos 135^\circ = \frac{\boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}} \text{である.}$$

原点 O を中心とした半径 1 の単位円周上に点 P を OP と x 軸の成す角が 135° となるようにとる.

さらに点 P から x 軸に垂線を下ろし, x 軸との交点を Q とする. すなわち P の座標を (x, y) としたとき, Q の座標は $(x, 0)$ である. このとき, $x < 0$ であることに注意する.

$\angle POQ = \angle OPQ = 45^\circ$ より, 三角形 QOP は直角二等辺三角形である.

QO=QP, すなわち $x = y$ であり, P は単位円周上にあるので $x^2 + y^2 = 1$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ である.

【答】 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

問題 007 (バリエーション No.1)

直角三角形 ABC において, $AB=3$, $AC=4$, $A = 90^\circ$, $B = \theta$ のときに

$$\sin \theta = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \cos \theta = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}, \tan \theta = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \text{である.}$$

三平方の定理から $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 25$, よって $BC=5$ である.

$$\sin \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}, \quad \cos \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

であり, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4}{3}$ である.

【答】 $\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}$

問題 008 (バリエーション No.1)

$$\sin \theta = \frac{3}{5} \text{ で } 90^\circ < \theta < 180^\circ \text{ のとき } \cos \theta = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \text{ である.}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき $\cos \theta < 0$ である. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

【答】 $-\frac{4}{5}$

問題 009 (バリエーション No.1)

$$\sin \theta = \frac{1}{3} \text{ (} 0^\circ < \theta < 90^\circ \text{) のとき } \tan \theta = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}} \text{ となる.}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき $\cos \theta > 0$ である. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ より } \tan \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

【答】 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

問題 010 (バリエーション No.1)

$$\cos \theta = \frac{1}{3} \text{ (} 0^\circ < \theta < 90^\circ \text{) のとき } \sin \theta = \frac{\boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}} \text{ となる.}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき $\sin \theta > 0$ である. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

【答】 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

問題 011 (バリエーション No.1)

$\cos \theta = -\frac{1}{3}$ ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) のとき $\tan \theta = \boxed{\text{アイ}} \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ となる.

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき $\tan \theta < 0$ である. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の両辺に $\frac{1}{\cos^2 \theta}$ をかけると

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

よって

$$\tan \theta = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = -\sqrt{9 - 1} = -2\sqrt{2}$$

【答】 $-2\sqrt{2}$