［コース ID：54］　微分積分 IV

54.9　2 重積分の応用

54.9.1　2 重積分の応用

問題 001（バリエーション No.1）

xy 平面上において, 次の曲線

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$$

と x 軸, および y 軸とで囲まれた図形の重心の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)$$

である.

領域 D の重心の座標 (x_g, y_g) はそれぞれ

$$x_g=\frac{\displaystyle\iint_D x\,dxdy}{\displaystyle\iint_D dxdy},\quad y_g=\frac{\displaystyle\iint_D y\,dxdy}{\displaystyle\iint_D dxdy}$$

で与えられる. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x 軸, y 軸で囲まれた領域を D とすると, $y=(1-\sqrt{x})^2$ より D は

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1.\ 0\leqq y\leqq (1-\sqrt{x})^2\}$$

と表せる. よって

$$\begin{aligned}\iint_D dxdy&=\int_0^1\left\{\int_0^{(1-\sqrt{x})^2}dy\right\}dx\\&=\int_0^1(1-\sqrt{x})^2\,dx\\&=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)\,dx\\&=\left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_D x\,dxdy&=\int_0^1\left\{\int_0^{(1-\sqrt{x})^2}x\,dy\right\}dx\\&=\int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2\,dx\\&=\int_0^1(x-2x\sqrt{x}+x^2)\,dx\\&=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{30}\end{aligned}$$

また, $D=\{(x,y)\mid 0\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq (1-\sqrt{y})^2\}$ とも表せるので,

$$\iint_D y\,dxdy=\int_0^1\left\{\int_0^{(1-\sqrt{y})^2}y\,dx\right\}dy=\frac{1}{30}$$

(x_g の計算と同じ式であることに注意する．)
よって重心の座標は

$$\left(\frac{\displaystyle\iint_D x\,dxdy}{\displaystyle\iint_D dxdy},\ \frac{\displaystyle\iint_D y\,dxdy}{\displaystyle\iint_D dxdy} \right) = \left(\frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{6}},\ \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{6}} \right) = \left(\frac{1}{5},\ \frac{1}{5} \right)$$

【答】 $\left(\boldsymbol{\frac{1}{5}},\ \boldsymbol{\frac{1}{5}} \right)$

問題 001（バリエーション No.28）

xy 平面上において, 次の曲線

$$y = 3x^3$$

と直線 $x = 1$, および x 軸とで囲まれた図形の重心の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \right)$$

である.

図形の領域 D は

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 3x^3\}$$

である.

$$\begin{aligned}\iint_D dxdy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{3x^3} dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 3x^3\,dx = \left[\frac{3}{4}\,x^4 \right]_0^1 = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_D x\,dxdy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{3x^3} x\,dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 3x^4\,dx = \left[\frac{3}{5}\,x^5 \right]_0^1 = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_D y\,dxdy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{3x^3} y\,dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \frac{9}{2}\,x^6\,dx = \left[\frac{9}{14}\,x^7 \right]_0^1 = \frac{9}{14}\end{aligned}$$

より重心の座標は

$$\left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{4}},\ \frac{\frac{9}{14}}{\frac{3}{4}} \right) = \left(\frac{4}{5},\ \frac{6}{7} \right)$$

【答】 $\left(\boldsymbol{\frac{4}{5}},\ \boldsymbol{\frac{6}{7}} \right)$

問題 002（バリエーション No.28）

xy 平面上において, 次の曲線

$$y = 10x^5$$

と直線 $x = 1$, および x 軸とで囲まれた図形の重心の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}} \right)$$

である.

図形の領域 D は

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 10x^5\}$$

である.

$$\begin{aligned} \iint_D dxdy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{10x^5} dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 10x^5\, dx = \left[\frac{5}{3}\, x^6 \right]_0^1 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_D x\, dxdy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{10x^5} x\, dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 10x^6\, dx = \left[\frac{10}{7}\, x^7 \right]_0^1 = \frac{10}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_D y\, dxdy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{10x^5} y\, dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 50\, x^{10}\, dx = \left[\frac{50}{11}\, x^{11} \right]_0^1 = \frac{50}{11} \end{aligned}$$

より重心の座標は

$$\left(\frac{\frac{10}{7}}{\frac{5}{3}},\ \frac{\frac{50}{11}}{\frac{5}{3}} \right) = \left(\frac{6}{7},\ \frac{30}{11} \right)$$

【答】 $\boldsymbol{\left(\frac{6}{7},\ \frac{30}{11} \right)}$

問題 003（バリエーション No.100）

曲面

$$z = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} \quad (0 \leqq x \leqq 10,\ 0 \leqq y \leqq 3)$$

の面積 S は

$$S = \boxed{\text{アイ}} \sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$$

である.

領域 D 上で $z=f(x,y)$ により定義される曲面の面積 S は

$$S=\iint_D \sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dxdy$$

で与えられる. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ より

$$\begin{aligned}
S&=\iint_D \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)^2+0+1}\,dxdy\\
&=\int_0^{10}\left\{\int_0^3 \frac{1}{2}\sqrt{\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\,dy\right\}dx\\
&=\frac{3}{2}\int_0^{10}\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx\\
&=\frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^{10}=\frac{3}{2}\left(\frac{20\sqrt{10}}{3}+2\sqrt{10}\right)=13\sqrt{10}
\end{aligned}$$

よって $S=13\sqrt{10}$ である.

【答】　$S=13\sqrt{10}$

問題 004（バリエーション No.50）

曲面

$$z=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\log y\quad (0\leqq x\leqq 4,\ e\leqq y\leqq e^2)$$

の面積 S は

$$S=e^4-e^2+\boxed{\text{ア}}$$

である.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{2}\left(y-y^{-1}\right)$ より, 曲面の面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}\,dxdy\\
&=\int_e^{e^2}\left\{\int_0^4 \sqrt{0+\frac{1}{4}\left(y-y^{-1}\right)^2+1}\,dx\right\}dy\\
&=\frac{1}{2}\int_e^{e^2}\left\{\int_0^4 \sqrt{\left(y-y^{-1}\right)^2+4}\,dx\right\}dy\\
&=2\int_e^{e^2}\sqrt{(y+y^{-1})^2}\,dy\\
&=2\int_e^{e^2}\left(y+y^{-1}\right)dy\\
&=2\left[\frac{1}{2}y^2+\log y\right]_e^{e^2}=e^4-e^2+2(\log e^2-\log e)=e^4-e^2+2
\end{aligned}$$

よって $S=e^4-e^2+2$ である.

【答】　$S=e^4-e^2+2$