［コース ID：54］　微分積分 IV

54.2　条件付き極値問題

54.2.1　条件付き極値問題

問題 001（バリエーション No.1）

$x^2+y^2=1$ の条件の下で, $z=x+y$ が極値を持つ可能性のある点 (x,y) は

$\left(\pm\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \pm\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)$ (複号同順)

である.

$f(x,y)=x+y,\quad w(x,y)=x^2+y^2-1$ と置くとラグランジュの未定乗数法から極値を持つ可能性のある点は

$$\frac{f_x}{w_x}=\frac{f_y}{w_y}$$

を満たす点である．よって

$$\frac{1}{2x}=\frac{1}{2y}$$

とすると, $x=y$ となる．今 $x^2+y^2=1$ であるから, 代入すれば $2x^2=1$ より $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
よって極値を持つ可能性がある点は

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

【答】　$\left(\pm\dfrac{\mathbf{\sqrt{2}}}{\mathbf{2}},\ \pm\dfrac{\mathbf{\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}\right)$

実際, $x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$ と置くと

$$z=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

となるので, $\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値をとり, $\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値をとる.
$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ であり, このとき $(x,y)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき, $\theta=\dfrac{5}{4}\pi$ であり, このとき $(x,y)=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
である.

問題 002（バリエーション No.2）

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\ (x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ の条件の下で, $z=x+2y$ が極値を持つ可能性のある点 (x,y) は

$\left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)$

である.

$f(x,y)=x+2y,\ w(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}-1$ とおくと, ラグランジュの未定乗数法から極値をとりうる点は $\dfrac{f_x}{w_x}=\dfrac{f_y}{w_y}$ を満たす. よって

$$\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{2}{\frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

とすると $2\sqrt{x}=4\sqrt{y}$, 両辺を 2 乗すれば $x=4y$ を得る. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ より $3\sqrt{y}=1$, $y=\dfrac{1}{9}$ である. よって極値をとりうる点は $\left(\dfrac{4}{9},\ \dfrac{1}{9}\right)$ である.

【答】　$\left(\boldsymbol{\dfrac{4}{9}},\ \boldsymbol{\dfrac{1}{9}}\right)$

実際 , $x=(1-\sqrt{y})^2$ より, $f(x,y)=3y-2\sqrt{y}+1$ と書ける. $\dfrac{df}{dy}=3-\dfrac{1}{\sqrt{y}}=0$ とすると $y=\dfrac{1}{9}$ であり, $\dfrac{d^2f}{dy^2}=\dfrac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\geqq 0$ より, この点で最小値をとることが分かる.

問題 003（バリエーション No.3）

$x^2+xy+y^2=4$ の条件の下で, $z=x^2+y^2$ が極値を持つ可能性のある点 (x,y) は

$\left(\pm\boxed{\text{ア}},\ \mp\boxed{\text{イ}}\right)$,　$\left(\pm\dfrac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \pm\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}\right)$ (複号同順)

である.

$f(x,y)=x^2+y^2,\ w(x,y)=x^2+xy+y^2-4$ とおくと, ラグランジュの未定乗数法より, 極値をとりうる点は $\dfrac{f_x}{w_x}=\dfrac{f_y}{w_y}$ を満たす. 計算すると

$$\frac{2x}{2x+y}=\frac{2y}{2y+x}$$

となるので, $x(2y+x)=y(2x+y)$ より $x^2=y^2$ を得る. $y=\pm x$ を $w(x,y)=0$ に代入すると

$$y=x\ \text{のとき}\quad x^2+x^2+x^2=4$$

より $3x^2=4$, すなわち $x=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $y=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ である. また

$$y=-x\ \text{のとき},\quad x^2-x^2+x^2=4$$

より, $x^2=4$, すなわち $x=\pm 2$, $y=\mp 2$ である. よって極値をとりうる点の候補は

$$(\pm 2,\ \mp 2),\quad \left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3},\ \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

【答】　$\boldsymbol{(\pm 2,\ \mp 2)}$,　$\left(\pm\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}},\ \pm\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}\right)$

実際, $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ と置くと,

$$f(x,y)=f(r)=r^2,\quad w(x,y)=w(r,\theta)=r^2+r^2\sin\theta\cos\theta-4$$

$w(r,\theta)=0$ とすると $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{r^2}-1$ より $\sin 2\theta=\dfrac{8}{r^2}-2$ である.

$$-1\leqq\frac{8}{r^2}-2\leqq 1$$

を整理すると, $\dfrac{8}{3}\leqq r^2\leqq 8$ であり, $r>0$ より $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\leqq r\leqq 2\sqrt{2}$ であることが分かる.

$r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ のとき, $\sin 2\theta=1$ より $\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$. このとき

$$(x,y)=\left(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3},\ \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

また, $r=2\sqrt{2}$ のとき, $\sin 2\theta=-1$ より, $\theta=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$. このとき

$$(x,y)=\left(\pm 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},\ \mp 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(\pm 2,\mp 2)$$

よって $f(x,y)$ は $(\pm 2,\mp 2)$ で最大値 8, $\left(\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ で最小値 $\dfrac{8}{3}$ をとる.

問題 004（バリエーション No.4）

$x^2-xy+y^2=63$ の条件の下で, $z=x^2+y^2+2(x+y)$ が極値を持つ可能性のある点 (x,y) は $\left(\pm\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}},\pm\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\right)$, $(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カキ}})$, $(\boxed{\text{クケ}},\ \boxed{\text{コ}})$ (複号同順) である.

$f(x,y)=x^2+y^2+2(x+y),\ w(x,y)=x^2-xy+y^2-63$ とすると, ラグランジュの未定乗数法から $\dfrac{f_x}{w_x}=\dfrac{f_y}{w_y}$ を満たす点が極値をとりうる点である. 計算すると

$$\frac{2x+2}{2x-y}=\frac{2y+2}{2y-x}$$

より $(x+1)(2y-x)=(y+1)(2x-y)$. これを整理すると $y^2+3y=x^2+3x$ となり

$$\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$$

$$y+\frac{3}{2}=\pm\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

より $y=x$ または $y=-x-3$ を得る. $w(x,y)=0$ に代入すれば

$$y=x \text{ のとき},\quad x^2-63=0$$

より $x=\pm 3\sqrt{7}$ である. また

$$y=-x-3 \text{ のとき } x^2+x(x+3)+(-x-3)^2-63=0$$

整理すると $x^2+3x-18=0$ より $x=-6,3$ である. よって極値をとりうる点は

$$\left(\pm 3\sqrt{7},\ \pm 3\sqrt{7}\right),\ (3,\ -6),\ (-6,\ 3)$$

【答】 $\boldsymbol{\left(\pm 3\sqrt{7},\ \pm 3\sqrt{7}\right),\ (3,\ -6),\ (-6,\ 3)}$