［コースID：54］　微分積分 IV

54.1　陰関数の微分法

54.1.1　陰関数の微分法

問題 001（バリエーション No.40）

方程式

$$5y^2 - 7y - 7x^2 + 3x = 0$$

について，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}\,x - \boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}\,y - \boxed{\text{カ}}}$ である．

$f(x,y) = 5y^2 - 7y - 7x^2 + 3x$ とおくと，陰関数の微分法から

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

である．$f_x(x,y) = -14x + 3,\ f_y(x,y) = 10y - 7$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-14x+3}{10y-7} = \frac{14x-3}{10y-7}$$

【答】　$\boldsymbol{\dfrac{14x-3}{10y-7}}$

問題 002（バリエーション No.1）

方程式

$$9y^3 + 3xy + 10x^3 = 0$$

について，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\boxed{\text{アイ}}\,x^2 + y}{\boxed{\text{ウ}}\,y^2 + x}$ である．

$f(x,y) = 9y^3 + 3xy + 10x^3$ とおくと，陰関数の微分法から $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x}{f_y}$ より，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{30x^2+3y}{27y^2+3x} = -\frac{10x^2+y}{9y^2+x}$$

【答】　$\boldsymbol{-\dfrac{10x^2+y}{9y^2+x}}$

問題 003（バリエーション No.20）

方程式

$$-4x\cos y + 5y\sin x = 0$$

について，$\dfrac{dy}{dx}$ を表す式として正しいものを次の中から選び，その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ．

⓪ $\dfrac{2\cos y - 5y\cos x}{2x\sin y + 5\sin x}$

① $\dfrac{4\cos y - 7y\cos x}{4x\sin y + 7\sin x}$

② $\dfrac{7\cos y - 9y\cos x}{7x\sin y + 9\sin x}$

③ $\dfrac{2\cos y - 9y\cos x}{2x\sin y + 9\sin x}$

④ $\dfrac{3\cos y - y\cos x}{3x\sin y + \sin x}$

⑤ $\dfrac{\cos y - 2y\cos x}{x\sin y + 2\sin x}$

⑥ $\dfrac{4\cos y - 5y\cos x}{4x\sin y + 5\sin x}$

⑦ $\dfrac{3\cos y - 4y\cos x}{3x\sin y + 4\sin x}$

$f(x, y) = -4x\cos y + 5y\sin x$ とする．陰関数の微分法を用いると

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{-4\cos y + 5y\cos x}{4x\sin y + 5\sin x} = \frac{4\cos y - 5y\cos x}{4x\sin y + 5\sin x}$$

【答】　⑥

問題 003（バリエーション No.30）

方程式

$$e^x\cos(3y)+e^y\sin(9x)=0$$

について, $\dfrac{dy}{dx}$ を表す式として正しいものを次の中から選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

⓪ $\dfrac{e^x\cos 10y-2e^y\cos 2x}{10e^x\sin 10y+e^y\sin 2x}$

① $\dfrac{e^x\cos 2y-5e^y\cos 5x}{2e^x\sin 2y+e^y\sin 5x}$

② $\dfrac{e^x\cos 8y+10e^y\cos 10x}{8e^x\sin 8y-e^y\sin 10x}$

③ $\dfrac{e^x\cos 3y-10e^y\cos 10x}{3e^x\sin 3y+e^y\sin 10x}$

④ $\dfrac{e^x\cos 4y+3e^y\cos 3x}{4e^x\sin 4y-e^y\sin 3x}$

⑤ $\dfrac{e^x\cos 6y+2e^y\cos 2x}{6e^x\sin 6y-e^y\sin 2x}$

⑥ $\dfrac{e^x\cos 8y+3e^y\cos 3x}{8e^x\sin 8y-e^y\sin 3x}$

⑦ $\dfrac{e^x\cos 3y+9e^y\cos 9x}{3e^x\sin 3y-e^y\sin 9x}$

$f(x,y)=e^x\cos(3y)+e^y\sin(9x)$ とおくと陰関数の微分法から

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{e^x\cos 3y+9e^y\cos 9x}{-3e^x\sin 3y+e^y\sin 9x}=\frac{e^x\cos 3y+9e^y\cos 9x}{3e^x\sin 3x-e^y\sin 9x}$$

【答】 ⑦

問題 004（バリエーション No.21）

方程式

$$7z^3 + 8xyz + 9y^3 + 9x^3 = 0$$

について, z の x に関する偏導関数を表す式として正しいものを次のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

⓪ $-\dfrac{27x^2 + 8yz}{21z^2 + 8xy}$

① $-\dfrac{21y^2 + 8xz}{24z^2 + 8xy}$

② $-\dfrac{27x^2 + 4yz}{21z^2 + 4xy}$

③ $-\dfrac{27y^2 + 8xz}{21z^2 + 8xy}$

④ $-\dfrac{15y^2 + 4xz}{21z^2 + 4xy}$

⑤ $-\dfrac{5y^2 + 2xz}{8z^2 + 2xy}$

⑥ $-\dfrac{3x^2 + yz}{3z^2 + xy}$

⑦ $-\dfrac{9x^2 + 2yz}{8z^2 + 2xy}$

$f(x, y, z) = 7z^3 + 8xyz + 9y^3 + 9x^3$ とおくと陰関数の微分法から

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{27x^2 + 8yz}{21z^2 + 8xy}$$

【答】　⓪

問題 004（バリエーション No.50）

方程式

$$ye^{3z} + ze^{2x} + xe^{10y} = 0$$

について, z の y に関する偏導関数を表す式として正しいものを次のなかから選び, その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ.

⓪ $-\dfrac{10xe^{10y} + e^{7z}}{7ye^{7z} + e^{7x}}$

① $-\dfrac{8xe^{8y} + e^{3z}}{3ye^{3z} + e^{9x}}$

② $-\dfrac{2ze^{2x} + e^{10y}}{3ye^{3z} + e^{2x}}$

③ $-\dfrac{3xe^{3y} + e^{5z}}{5ye^{5z} + e^{5x}}$

④ $-\dfrac{3ze^{3x} + e^{5y}}{4ye^{4z} + e^{3x}}$

⑤ $-\dfrac{10ze^{10x} + e^{2y}}{4ye^{4z} + e^{10x}}$

⑥ $-\dfrac{9ze^{9x} + e^{8y}}{3ye^{3z} + e^{9x}}$

⑦ $-\dfrac{10xe^{10y} + e^{3z}}{3ye^{3z} + e^{2x}}$

$f(x, y, z) = ye^{3z} + ze^{2x} + xe^{10y}$ とおくと陰関数の微分法から

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{e^{3z} + 10xe^{10y}}{3ye^{3z} + e^{2x}} = -\frac{10xe^{10y} + e^{3z}}{3ye^{3z} + e^{2x}}$$

【答】 ⑦