［コース ID：54］　微分積分 IV

54.5　2 重積分の計算

54.5.1　2 重積分の計算

問題 001（バリエーション No.10）

領域 $D = \{(x, y) \mid -3 \leqq x \leqq 0,\ -1 \leqq y \leqq 1\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

の重積分 $V = \iint_D f(x, y)\,dxdy$ の値は

$$V = \boxed{\text{アイ}}$$

である.

x 方向から計算していく.

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy &= \int_{-1}^{1} \left\{\int_{-3}^{0} (x^2 + y^2)\,dx\right\} dy \\ &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{3}x^3 + xy^2\right]_{-3}^{0} dy \\ &= \int_{-1}^{1} (9 + 3y^2)\,dy \\ &= \left[9y + y^3\right]_{-1}^{1} \\ &= 20\end{aligned}$$

よって $V = 20$ である.

【答】　$\boldsymbol{V = 20}$

問題 001（バリエーション No.30）

領域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leqq x \leqq 7,\ 1 \leqq y \leqq 2\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$$

の重積分 $V = \iint_D f(x, y)\,dxdy$ の値は

$$V = \boxed{\text{アイ}}$$

である.

y 方向から計算してみる.

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy &= \int_1^7 \left\{ \int_1^2 \frac{x^2}{y^2}\,dy \right\} dx \\
&= \int_1^7 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_1^2 dx \\
&= \int_1^7 \frac{1}{2}\,x^2\,dx \\
&= \left[\frac{1}{6}\,x^3 \right]_1^7 \\
&= \frac{1}{6}(343-1) = 57
\end{aligned}$$

よって $V = 57$ である.

【答】　$\boldsymbol{V = 57}$

問題 001（バリエーション No.60）

領域 $D = \{(x, y) \mid 2 \leqq x \leqq 8,\ 3 \leqq y \leqq 5\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = (x-y)^2$$

の重積分 $V = \displaystyle\iint_D f(x, y)\,dxdy$ の値は

$$V = \boxed{\text{アイ}}$$

である.

x 方向から計算していく.

$$\begin{aligned}
\iint_D (x-y)^2\,dxdy &= \int_3^5 \left\{ \int_2^8 (x-y)^2\,dx \right\} dy \\
&= \int_3^5 \left[\frac{1}{3}(x-y)^3 \right]_2^8 dy \\
&= \frac{1}{3}\int_3^5 \{(8-y)^3 - (2-y)^3\}\,dy \\
&= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{4}(8-y)^4 + \frac{1}{4}(2-y)^4 \right]_3^5 \\
&= \frac{1}{12}\left(-3^4 + (-3)^4 - (-5^4 + (-1)^4)\right) \\
&= \frac{1}{12}\left(-81 + 81 + 625 - 1\right) \\
&= \frac{624}{12} = 52
\end{aligned}$$

よって $V = 52$ である.

【答】　$\boldsymbol{V = 52}$

問題 001（バリエーション No.86）

領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 9,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = \sqrt{xy}$$

の重積分 $V = \iint_D f(x, y)\, dxdy$ の値は

$$V = \boxed{\text{アイ}}$$

である.

y 方向から計算していく.

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{xy}\, dxdy &= \int_0^9 \left\{ \int_0^1 \sqrt{xy}\, dy \right\} dx \\
&= \int_0^9 \left[\frac{2}{3} \sqrt{xy^3} \right]_0^1 dx \\
&= \frac{2}{3} \int_0^9 \sqrt{x}\, dy \\
&= \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_0^9 \\
&= \frac{4}{9} \times 3^3 = 12
\end{aligned}$$

よって $V = 12$ である.

【答】 $\boldsymbol{V = 12}$

問題 002（バリエーション No.31）

領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = \cos(3x + y)$$

の重積分 $V = \iint_D f(x, y)\, dxdy$ の値は

$$V = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である.

y 方向から計算していく.

$$\begin{aligned}\iint_D \cos(3x+y)\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x+y)\,dy \right\} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\ \sin(3x+y)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\ dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) - \sin 3x \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x - \sin 3x)\ dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(\sin 3x + \cos 3x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{3}(-1-1) = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

よって $V = -\dfrac{2}{3}$ である.

【答】 $\boldsymbol{V = \dfrac{-2}{3}}$

問題 003（バリエーション No.31）

領域 $D = \{(x,y) \mid -1 \leqq x \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq x^2\}$ における, 次の関数

$$f(x,y) = xy + x$$

の重積分 $V = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ の値は

$$V = \frac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である.

y の積分区間が x を含んでいるので, y 方向から計算していく.

$$\begin{aligned}\iint_D (xy+x)\,dxdy &= \int_{-1}^{3} \left\{ \int_0^{x^2} x(y+1)\,dy \right\} dx \\ &= \int_{-1}^{3} \left[\frac{x}{2}(y+1)^2 \right]_0^{x^2} dx \\ &= \int_{-1}^{3} \left(\frac{x}{2}\left((x^2+1)^2 - 1\right) \right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} \left(x^5 + 2x^3\right)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^4 \right]_{-1}^{3} \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{3}3^6 + 3^4 \right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^6 + (-1)^4 \right) \right) \\ &= \frac{1}{4}\times 324 - \frac{1}{4}\times\frac{4}{3} = 81 - \frac{1}{3} = \frac{242}{3}\end{aligned}$$

よって $V = \dfrac{242}{3}$ である.

【答】 $\boldsymbol{V = \dfrac{242}{3}}$

問題 003（バリエーション No.59）

領域 $D = \{(x, y) \mid 3 \leqq x \leqq 4,\ 1 \leqq y \leqq x\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2}$$

の重積分 $V = \displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$ の値は

$$V = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$$

である.

y の積分区間が x を含んでいるので, y 方向から計算していく.

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{y}{x^2}\, dxdy &= \int_3^4 \left\{ \int_1^x \frac{y}{x^2}\, dy \right\} dx \\
&= \int_3^4 \left[\frac{1}{2x^2}\, y^2 \right]_1^x dx \\
&= \int_3^4 \frac{1}{2x^2} \left(x^2 - 1\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_3^4 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{x} \right]_3^4 \\
&= \frac{1}{2} \left((4 - 3) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{12} \right) = \frac{11}{24}
\end{aligned}$$

よって $V = \dfrac{11}{24}$ である.

【答】 $\boldsymbol{V = \dfrac{11}{24}}$

問題 004（バリエーション No.31）

領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3},\ \pi \leqq y \leqq x\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = \cos(x + 3y)$$

の重積分 $V = \displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$ の値は

$$V = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$$

である.

y の積分区間が x を含んでいるので, y 方向から計算していく.

$$\begin{aligned}
\iint_D \cos(x+3y)\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ \int_\pi^x \cos(x+3y)\,dy \right\} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{1}{3}\sin(x+3y) \right]_\pi^x dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin 4x - \sin(x+3\pi)\right) dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin 4x + \sin x\right) dx \\
&= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\cos 4x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\left(\cos\frac{4}{3}\pi - 1\right) + \left(\cos\frac{\pi}{3} - 1\right) \right) \\
&= -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{24}
\end{aligned}$$

よって $V = \dfrac{7}{24}$ である.

【答】 $\boldsymbol{V = \dfrac{7}{24}}$

問題 004（バリエーション No.62）

領域 $D = \{(x,y) \mid -\pi \leqq x \leqq y,\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\}$ における, 次の関数

$$f(x,y) = \sin(x+y)$$

の重積分 $V = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ の値は

$$V = \boxed{\text{アイ}}$$

である.

x の積分区間に y が含まれているので, x 方向から計算する.

$$\begin{aligned}
\iint_D \sin(x+y)\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{-\pi}^y \sin(x+y)\,dx \right\} dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[-\cos(x+y) \Big]_{-\pi}^y dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos 2y + \cos(-\pi+y)\right) dy \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2y + \sin y)\,dy \\
&= -\left[\frac{1}{2}\sin 2y - \cos y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -(-(-1)) = -1
\end{aligned}$$

よって $V = -1$ である.

【答】 $\boldsymbol{V = -1}$

問題 005（バリエーション No.21）

領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq \sqrt{y},\ 0 \leqq y \leqq 4\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = x + y$$

の重積分 $V = \displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$ の値は

$$V = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である.

x の積分区間に y が含まれているので, x 方向から計算する.

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)\, dxdy &= \int_0^4 \left\{ \int_0^{\sqrt{y}} (x+y)\, dx \right\} dy \\ &= \int_0^4 \left[\frac{1}{2}x^2 + xy \right]_0^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^4 \left(\frac{1}{2}\, y + y^{\frac{3}{2}} \right) dy \\ &= \left[\frac{1}{4}\, y^2 + \frac{2}{5}\, y^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 \\ &= 4 + \frac{2}{5} \times 2^5 = \frac{84}{5}\end{aligned}$$

よって $V = \dfrac{84}{5}$ である.

【答】　$\boldsymbol{V = \dfrac{84}{5}}$

問題 005（バリエーション No.90）

領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq y^2,\ -1 \leqq y \leqq 0\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = x^3 + y^3$$

の重積分 $V = \displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$ の値は

$$V = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$$

である.

x の積分区間に y が含まれているので, x 方向から計算する.

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^3+y^3)\,dxdy &= \int_{-1}^{0}\left\{\int_0^{y^2}(x^3+y^3)\,dx\right\}dy \\
&= \int_{-1}^{0}\left[\frac{1}{4}x^4+xy^3\right]_0^{y^2}dy \\
&= \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{4}\,y^8+y^5\right)dy \\
&= \left[\frac{1}{36}\,y^9+\frac{1}{6}\,y^6\right]_{-1}^{0} \\
&= \frac{1}{36}-\frac{1}{6}=-\frac{5}{36}
\end{aligned}$$

よって $V=-\dfrac{5}{36}$ である.

【答】　$\boldsymbol{V=\dfrac{-5}{36}}$