［コース ID：54］　微分積分 IV

54.6　変数変換

54.6.1　変数変換

問題 001（バリエーション No.30）

領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq 3x + 2y \leqq 3,\ 0 \leqq -x + y \leqq 3\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = 2x + y$$

の重積分 $V = \iint_D f(x, y)\,dxdy$ の値は

$$V = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$$

である.

$u = 3x + 2y,\ v = -x + y$ と変数変換すると, $0 \leqq u \leqq 3,\ 0 \leqq v \leqq 3$ である. また

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{5}u - \dfrac{2}{5}v \\ y = \dfrac{1}{5}u + \dfrac{3}{5}v \end{cases}$$

なので, ヤコビアン $J(u, v)$ を計算すると

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{5} & -\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{3}{5} \end{vmatrix} = \frac{3}{25} + \frac{2}{25} = \frac{1}{5}$$

よって

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x, y)\,dxdy &= \int_0^3 \int_0^3 \left(2\left(\frac{1}{5}u - \frac{2}{5}v\right) + \left(\frac{1}{5}u + \frac{3}{5}v\right)\right) \cdot \frac{1}{5}\,dudv \\
&= \frac{1}{25} \int_0^3 \int_0^3 (3u - v)\,dudv \\
&= \frac{1}{25} \int_0^3 \left[\frac{3}{2}u^2 - uv\right]_0^3 dv \\
&= \frac{1}{25} \int_0^3 \left(\frac{27}{2} - 3v\right) dv \\
&= \frac{1}{25} \left[\frac{27}{2}v - \frac{3}{2}v^2\right]_0^3 \\
&= \frac{1}{25} \left(\frac{81}{2} - \frac{27}{2}\right) = \frac{54}{50} = \frac{27}{25}
\end{aligned}$$

よって $V = \dfrac{27}{25}$ である.

【答】　$\boldsymbol{V = \dfrac{27}{25}}$

問題 002（バリエーション No.22）

領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq 5x + 2y \leqq 5,\ 0 \leqq -x + y \leqq 5\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = x - y$$

の重積分 $V = \iint_D f(x, y)\, dxdy$ の値は

$$V = \frac{\boxed{\text{アイウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$$

である.

$u = 5x + 2y,\quad v = -x + y$ と変数変換すると $0 \leqq u \leqq 5,\ 0 \leqq v \leqq 5$ である. また

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{7}u - \dfrac{2}{7}v \\ y = \dfrac{1}{7}u + \dfrac{5}{7}v \end{cases}$$

となるので, ヤコビアン $J(u, v)$ を計算すると

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{7} & -\dfrac{2}{7} \\ \dfrac{1}{7} & \dfrac{5}{7} \end{vmatrix} = \frac{5}{49} + \frac{2}{49} = \frac{1}{7}$$

よって

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y)\, dxdy &= \int_0^5 \int_0^5 \left(\left(\frac{1}{7}u - \frac{2}{7}v \right) - \left(\frac{1}{7}u + \frac{5}{7}v \right) \right) \cdot \frac{1}{7}\, dudv \\ &= \frac{1}{7} \int_0^5 \int_0^5 (-v)\, dudv \\ &= -\frac{1}{7} \int_0^5 [uv]_0^5\ dv \\ &= -\frac{1}{7} \int_0^5 5v\, dv \\ &= -\frac{5}{7} \left[\frac{1}{2}v^2 \right]_0^5 = -\frac{5}{7} \times \frac{25}{2} = -\frac{125}{14} \end{aligned}$$

よって $V = -\dfrac{125}{14}$ である.

【答】 $\mathbf{\dfrac{-125}{14}}$

問題 003（バリエーション No.30）

領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x + 2y \leqq 3,\ 0 \leqq -x + y \leqq 3\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = (2x + y)^2$$

の重積分 $V = \iint_D f(x, y)\, dxdy$ の値は

$$V = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である.

$u = x + 2y,\ \ v = -x + y$ と変数変換すると $0 \leqq u \leqq 3,\ 0 \leqq v \leqq 3$ である. また

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}u - \dfrac{2}{3}v \\ y = \dfrac{1}{3}u + \dfrac{1}{3}v \end{cases}$$

であるから, ヤコビアン $J(u, v)$ を計算すると

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

よって

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x, y)\, dxdy &= \int_0^3 \int_0^3 \left(2\left(\frac{1}{3}u - \frac{2}{3}v\right) + \left(\frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v\right)\right)^2 \cdot \frac{1}{3}\, dudv \\
&= \frac{1}{3}\int_0^3 \int_0^3 (u - v)^2\, dudv \\
&= \frac{1}{3}\int_0^3 \left[\frac{1}{3}(u - v)^3\right]_0^3 dv \\
&= \frac{1}{9}\int_0^3 \left((3 - v)^3 - (-v)^3\right) dv \\
&= \frac{1}{9}\int_0^3 \left(v^3 - (v - 3)^3\right) dv \\
&= \frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}v^4 - \frac{1}{4}(v - 3)^4\right]_0^3 \\
&= \frac{1}{9}\left(\frac{81}{4} + \frac{81}{4}\right) = \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

よって $V = \dfrac{9}{2}$ である.

【答】　$\boldsymbol{V = \dfrac{9}{2}}$

問題 004（バリエーション No.20）

領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x + y \leqq 4,\ 0 \leqq -x + 2y \leqq 3\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = (x - 2y)^2$$

の重積分 $V = \iint_D f(x, y)\, dxdy$ の値は

$$V = \boxed{\text{アイ}}$$

である.

$u = x + y,\quad v = -x + 2y$ と変数変換すると $0 \leqq u \leqq 4,\ 0 \leqq v \leqq 3$ であり,

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}u - \dfrac{1}{3}v \\ y = \dfrac{1}{3}u + \dfrac{1}{3}v \end{cases}$$

となるので, ヤコビアン $J(u, v)$ を計算すると

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$x - 2y = -v$ であるから

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y)\, dxdy &= \int_0^3 \int_0^4 (-v)^2 \cdot \frac{1}{3}\, dudv \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 \left[uv^2\right]_0^4 dv \\ &= \frac{4}{3} \int_0^3 v^2\, dv \\ &= \frac{4}{3} \left[\frac{1}{3} v^3\right]_0^3 = \frac{4}{9} \cdot 27 = 12 \end{aligned}$$

よって $V = 12$ である.

【答】　$\boldsymbol{V = 12}$