［コース ID：54］　微分積分 IV

54.3　包絡線

54.3.1　包絡線

問題 001（バリエーション No.20）

t が実数全体を動くとき, xy 平面上における曲線群

$$y = 6t^2x^2 + 2t$$

の包絡線の方程式は $y = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}\,x^2}$ である.

方程式 $f(x, y, t) = 0$ によって定まる曲線群の包絡線は

$$f(x, y, t) = 0, \quad f_t(x, y, t) = 0$$

から t を除去することで得られる. $f(x, y, t) = 6t^2x^2 + 2t - y$ とし

$$f_t(x, y, t) = 12tx^2 + 2 = 0$$

とすると, $t = -\dfrac{1}{6x^2}$ である. これを $f(x, y, t) = 0$ に代入すると

$$\frac{1}{6x^2} - \frac{1}{3x^2} - y = 0$$

よって包絡線の方程式は $y = -\dfrac{1}{6x^2}$ となる.

【答】 $\boldsymbol{\dfrac{-1}{6x^2}}$

問題 002（バリエーション No.3）

t が実数全体を動くとき, xy 平面上における曲線群

$$y = tx^2 + 3t^2x$$

の包絡線の方程式は $y = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}x^3$ である.

$f(x, y, t) = tx^2 + 3t^2x - y$ とすると

$$f_t(x, y, t) = x^2 + 6tx$$

$f_t(x, y, t) = 0$ のとき $t = -\dfrac{x}{6}$ である. $f(x, y, t) = 0$ に代入すると

$$-\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{12} - y = 0$$

よって包絡線の方程式は $y = -\dfrac{1}{12}x^3$ である.

【答】　$\boldsymbol{\dfrac{-1}{12}x^3}$

問題 002（バリエーション No.35）

t が実数全体を動くとき, xy 平面上における曲線群

$$y = \frac{x^2}{t} + 4t$$

の包絡線の方程式は $y = \pm$ $\boxed{\text{ア}}$ x である.

$f(x, y, t) = \dfrac{x^2}{t} + 4t - y$ とすると

$$f_t(x, y, t) = -\frac{x^2}{t^2} + 4$$

$f_t(x, y, t) = 0$ とすると $t = \pm\dfrac{x}{2}$ となる. $f(x, y, t) = 0$ に代入すると $\pm 2x \pm 2x - y = 0$ より 包絡線の方程式は $y = \pm 4x$ である.

【答】　$\boldsymbol{y = \pm 4x}$

問題 003（バリエーション No.10）

t が実数全体を動くとき, xy 平面上における曲線群

$$y = (x - t)^2 - 10t$$

の包絡線の方程式は $y =$ $\boxed{\text{アイウ}}$ $x -$ $\boxed{\text{エオ}}$ である.

$f(x, y, t) = (x - t)^2 - 10t - y$ とおくと

$$f_t(x, y, t) = -2(x - t) - 10$$

$f_t(x, y, t) = 0$ とすれば $t = x + 5$ を得るので, $f(x, y, t) = 0$ に代入すると

$$5^2 - 10(x + 5) - y = 0$$

よって包絡線の方程式は $y = -10x - 25$ となる.

【答】　$\boldsymbol{y = -10x - 25}$

問題 004（バリエーション No.6）

t が実数全体を動くとき, xy 平面上における曲線群

$$(x - 4t)^2 + (y - t)^2 = t^2$$

の包絡線の方程式は $y =$ $\boxed{\text{ア}}$ および $y = \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}x$ である.

$f(x, y, t) = (x - 4t)^2 + (y - t)^2 - t^2$ とすると

$$f_t(x, y, t) = -8(x - 4t) - 2(y - t) - 2t = -8x - 2y + 32t$$

$f_t(x,y,t)=0$ とすると $t=\dfrac{4x+y}{16}$ となるので, これを $f(x,y,t)=0$ に代入すると

$$\left(x-4\left(\frac{4x+y}{16}\right)\right)^2+\left(y-\frac{4x+y}{16}\right)^2=\left(\frac{4x+y}{16}\right)^2$$

これを整理すると,

$$\frac{y^2}{16}+y^2-\frac{4xy+y^2}{8}=0$$

$$17y^2-(8xy+2y^2)=0$$

$$15y^2-8xy=0$$

$$y(15y-8x)=0$$

よって 包絡線の方程式は $y=0$ および $y=\dfrac{8}{15}x$ となる.

【答】 $\boldsymbol{y=0}$, **および** $\boldsymbol{y=\dfrac{8}{15}x}$