［コース ID：54］　微分積分 IV

54.8　広義積分

54.8.1　広義積分

問題 001（バリエーション No.20）

領域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 4\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

の重積分 $V = \iint_D f(x, y)\, dxdy$ の値は

$$V = \boxed{\text{ア}}\,\pi$$

である.

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と極座標変換すると, $x^2 + y^2 \leqq 4$ より $0 \leqq r \leqq 2,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ である. ヤコビアンは $J(r,\ \theta) = r$ である.

$f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ は原点 $(0, 0)$ で定義されないので領域 D_c を

$$D_c = \{(x, y) \mid c^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4\}$$

と定めると $f(x, y)$ は D_c 上のすべての点で定義され, $c \to 0$ のとき, D_c は D に限りなく近づく. よって

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy &= \lim_{c \to 0} \iint_{D_c} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy \\
&= \lim_{c \to 0} \int_0^{2\pi} \int_c^2 \frac{1}{r} \cdot r\, drd\theta \\
&= \lim_{c \to 0} 2\pi(2 - c) = 4\pi
\end{aligned}$$

よって $V = 4\pi$ である.

【答】　$V = 4\pi$

問題 002（バリエーション No.1）

領域 $D=\{(x,y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x^2+y^2\leqq 1\}$ における, 次の関数

$$f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

の重積分 $V=\iint_D f(x,y)\,dxdy$ の値は

$$V=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である.

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ と極座標変換すると, $x^2+y^2\leqq 1$ より $0\leqq r\leqq 1$, また $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ より $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ である. ヤコビアンは $J(r,\ \theta)=r$ である.
$f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は原点 $(0,0)$ で定義されないので領域 D_c を

$$D_c=\{(x,y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ c^2\leqq x^2+y^2\leqq 1\}$$

と定めると $f(x,y)$ は D_c 上のすべての点で定義され, $c\to 0$ のとき, D_c は D に限りなく近づく. よって

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy &= \lim_{c\to 0}\iint_{D_c}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy\\ &= \lim_{c\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_c^1 \frac{r\cos\theta}{r}\cdot r\,drd\theta\\ &= \lim_{c\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_c^1 r\cos\theta\,drd\theta\\ &= \lim_{c\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}r^2\cos\theta\right]_c^1 d\theta\\ &= \lim_{c\to 0}\frac{1}{2}(1-c^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって $V=\dfrac{1}{2}$ である.

【答】 $\boldsymbol{V=\frac{1}{2}}$

問題 003（バリエーション No.30）

領域 $D = \{(x,y) \mid y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 100\}$ における, 次の関数

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

の重積分 $V = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ の値は

$$V = \boxed{\textsf{アイ}}$$

である.

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と極座標変換すると, $x^2+y^2 \leqq 100$ より $0 \leqq r \leqq 10$, また $y \geqq 0$ より $0 \leqq \theta \leqq \pi$ である. ヤコビアンは $J(r,\ \theta) = r$ である.
$f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ は原点 $(0,0)$ で定義されないので領域 D_c を

$$D_c = \{(x,y) \mid y \geqq 0,\ c^2 \leqq x^2+y^2 \leqq 100\}$$

と定めると $f(x,y)$ は D_c 上のすべての点で定義され, $c \to 0$ のとき, D_c は D に限りなく近づく. よって

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy &= \lim_{c\to 0}\iint_{D_c} \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy \\
&= \lim_{c\to 0}\int_0^{\pi}\int_c^{10} \frac{r\sin\theta}{r^2}\cdot r\,drd\theta \\
&= \lim_{c\to 0}\int_0^{\pi}\int_c^{10} \sin\theta\,drd\theta \\
&= \lim_{c\to 0}(10-c)\int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \\
&= 10\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 20
\end{aligned}$$

よって $V = 20$ である.

【答】　$\boldsymbol{V = 20}$

問題 004（バリエーション No.29）

領域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 64\}$ における, 次の関数

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

の重積分 $V = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ の値は

$$V = \boxed{\textsf{アイ}}\,\pi$$

である.

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と極座標変換すると, $x^2+y^2 \leqq 64$ より $0 \leqq r \leqq 8$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ である. ヤコビアンは $J(r,\ \theta) = r$ である.

$f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ は原点 $(0,0)$ で定義されないので領域 D_c を

$$D_c = \{(x,y) \mid c^2 \leqq x^2+y^2 \leqq 64\}$$

と定めると $f(x,y)$ は D_c 上のすべての点で定義され, $c \to 0$ のとき, D_c は D に限りなく近づく. よって

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dxdy &= \lim_{c\to 0}\iint_{D_c} \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dxdy \\
&= \lim_{c\to 0}\int_0^{2\pi}\int_c^8 \frac{r^2\sin^2\theta}{r^2}\cdot r\,drd\theta \\
&= \lim_{c\to 0}\int_0^{2\pi}\int_c^8 r\sin^2\theta\,drd\theta \\
&= \lim_{c\to 0}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\,r^2\sin^2\theta\right]_c^8 d\theta \\
&= \lim_{c\to 0}\frac{1}{2}(64-c^2)\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\
&= 32\left[\frac{1}{2}\,\theta - \frac{1}{4}\,\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= 32\pi
\end{aligned}$$

よって $V = 32\pi$ である.

【答】　$\boldsymbol{V = 32\pi}$