［コース ID：54］　微分積分 IV

54.7　極座標による 2 重積分

54.7.1　極座標による 2 重積分

問題 001（バリエーション No.1）

領域 $D = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 1\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = x$$

の重積分 $V = \displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$ の値は

$$V = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である.

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と極座標変換すると $x^2 + y^2 \leqq 1$ より $0 \leqq r \leqq 1$, また $x \geqq 0, y \geqq 0$ より $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である. ヤコビアンは $J(r, \theta) = r$ なので

$$\begin{aligned}\iint_D x\, dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\cos\theta \cdot r\, drd\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} r^3 \cos\theta\right]_0^1 d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \\ &= \frac{1}{3}\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

よって $V = \dfrac{1}{3}$ である.

【答】　$\boldsymbol{V = \dfrac{1}{3}}$

問題 002（バリエーション No.45）

領域 $D = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 4^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 5^2\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

の重積分 $V = \displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$ の値は

$$V = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$$

である.

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と極座標変換すると $4^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 5^2$ より $4 \leqq r \leqq 5$, また $x \geqq 0, y \geqq 0$

より $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である．ヤコビアンは $J(r,\theta) = r$ なので

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_4^5 r \cdot r\,drd\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}r^3\right]_4^5 d\theta \\ &= \frac{125-64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{61}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{61}{6}\pi\end{aligned}$$

よって $V = \dfrac{61}{6}\pi$ である．

【答】 $\boldsymbol{V = \dfrac{61}{6}\pi}$

問題 003（バリエーション No.26）

領域 $D = \{(x,y) \mid y \geqq 0,\ 3^2 \leqq x^2+y^2 \leqq 5^2\}$ における, 次の関数

$$f(x,y) = x^2+y^2$$

の重積分 $V = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ の値は

$$V = \boxed{\textbf{アイウ}}\,\pi$$

である．

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と極座標変換すると $3^2 \leqq x^2+y^2 \leqq 5^2$ より $3 \leqq r \leqq 5$, また $y \geqq 0$ より $0 \leqq \theta \leqq \pi$ である．ヤコビアンは $J(r,\theta) = r$ なので

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy &= \int_0^{\pi} \int_3^5 r^2 \cdot r\,drd\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_3^5 d\theta \\ &= \frac{625-81}{4}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{544}{4}\pi = 136\pi\end{aligned}$$

よって $V = 136\pi$ である．

【答】 $\boldsymbol{V = 136\pi}$

問題 004（バリエーション No.38）

領域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 3^2\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = x^2 y^2$$

の重積分 $V = \iint_D f(x, y)\, dxdy$ の値は

$$V = \frac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$$

である.

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と極座標変換すると $x^2 + y^2 \leqq 3^2$ より $0 \leqq r \leqq 3$, また $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ である. ヤコビアンは $J(r, \theta) = r$ なので

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2 y^2\, dxdy &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^4 \cos^2\theta \sin^2\theta \cdot r\, drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{6} r^6\right]_0^3 \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 d\theta \\
&= \frac{243}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta\, d\theta \\
&= \frac{243}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\theta}{2}\, d\theta \\
&= \frac{243}{16} \left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{243}{8}\pi
\end{aligned}$$

よって $V = \dfrac{243}{8}\pi$ である.

【答】 $\boldsymbol{V = \dfrac{243}{8}\pi}$

問題 005（バリエーション No.5）

領域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 36\}$ における, 次の関数

$$f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$$

の重積分 $V = \iint_D f(x, y)\, dxdy$ の値は

$$V = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}\pi$$

である.

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と極座標変換すると $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 36$ より $1 \leqq r \leqq 6$, また $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ で

ある．ヤコビアンは $J(r,\theta)=r$ なので

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_1^6 \frac{1}{r^4}\cdot r\,drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}r^{-2}\right]_1^6 d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{36}-1\right)\int_0^{2\pi}\,d\theta \\ &= \frac{35}{36\cdot 2}\cdot 2\pi = \frac{35}{36}\pi\end{aligned}$$

よって $V=\dfrac{35}{36}\pi$ である．

【答】　$\boldsymbol{V=\dfrac{35}{36}\pi}$