# ［コース ID：50］　基礎数学 AI

## 50.11　不等式の証明, 集合・命題

### 50.11.1　不等式の証明

### 50.11.2　集合

**問題 001（バリエーション No.1）**

100 以下の正の整数において, 2 の倍数の集合を $A$, 3 の倍数の集合を $B$ とすると,
$A$ の個数は $\boxed{\textbf{アイ}}$ 個,
$B$ の個数は $\boxed{\textbf{ウエ}}$ 個,
$A \cap B$ の個数は $\boxed{\textbf{オカ}}$ 個,
$A \cup B$ の個数は $\boxed{\textbf{キク}}$ 個である.

正の整数 $n$ が 2 の倍数であるとき, $n = 2k$ と表せる.
$n$ は 100 以下であるので $1 \leqq 2k \leqq 100$ であり, $k$ は整数であるから

$$1 \leqq k \leqq 50$$

である. このような $k$ は 50 個存在するので, $A$ の個数は 50 個である.
同様に $n$ が 3 の倍数の時 $n = 3k$ と表せる. $1 \leqq 3k \leqq 100$ とすると, $k$ は整数であるから

$$1 \leqq k \leqq 33$$

である. このような $k$ は 33 個存在するので $B$ の個数は 33 個である.
100 以下の正の整数 $n$ が $A \cap B$ の要素の時,

$$n \text{ は 2 の倍数　かつ　} n \text{ は 3 の倍数}$$

であるので $n$ は 6 の倍数である. $n = 6k$ とすると, $n$ は 100 以下の正の整数であるから

$$1 \leqq k \leqq 16$$

である. よって $A \cap B$ の個数は 16 個である.
$n$ が $A \cup B$ の要素であるとき,

$$n \text{ は 2 の倍数　または　} n \text{ は 3 の倍数}$$

であるが, 一般に集合 $A, B$ に対し

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

であるので, $A \cup B$ の要素の数は $50 + 33 - 16 = 67$ 個である.

**【答】　$A$ の個数は 50 個, $B$ の個数は 33 個, $A \cap B$ の個数は 16 個, $A \cup B$ の個数は 67 個である.**

**問題 002（バリエーション No.1）**

100 以下の正の整数のうち, 2 と 3 の両方で割り切れない数は全部で $\boxed{\textbf{アイ}}$ 個ある.

100 以下の正の整数のうち, 2 の倍数の集合を $A$, 3 の倍数の集合を $B$ とする.
100 以下の正の整数 $n$ が 2 と 3 の両方で割り切れないとき

$n$ は 2 の倍数でない　かつ　$n$ は 3 の倍数でない

と言い換えられるので $n$ は $\overline{A} \cap \overline{B}$ の要素である.
$A, B, A \cap B, A \cup B$ の要素の数はそれぞれ 50, 33, 16, 67 個であり,

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

であるから $\overline{A} \cap \overline{B}$ の要素の数は $100 - 67 = 33$ 個である.

**【答】　33 個**

**問題 003（バリエーション No.1）**

あるクラス 40 人のうち,
運動部に所属している人は 25 人,
運動部と文化部に所属している人は 7 人,
運動部と文化部どちらにも所属していない人は 7 人であった.
この時,
　運動部だけに所属している人は $\boxed{\text{アイ}}$ 人
　文化部に所属している人は $\boxed{\text{ウエ}}$ 人
　文化部だけに所属している人は $\boxed{\text{オ}}$ 人
である.

運動部に所属している人の集合を $A$, 文化部に所属している人の集合を $B$ とする.
このとき, 運動部と文化部に所属している人の集合は $A \cap B$,
運動部と文化部どちらにも所属していない人の集合は $\overline{A} \cap \overline{B}$ と表せるので, 仮定から

$$|A| = 25, \quad |A \cap B| = 7, \quad |\overline{A} \cap \overline{B}| = 7$$

である. $x$ が運動部だけに所属している人であるとき

$x$ は運動部に所属している人　かつ　$x$ は文化部に所属していない人

と言い換えられるので $x$ は $A$ の要素かつ $\overline{A \cap B}$ の要素である.
$A \cap B$ は $A$ の部分集合であるから, 運動部だけに所属している人の人数は

$$|A| - |A \cap B| = 25 - 7 = 18$$

よって **運動部だけに所属している人は 18 人** である. 次に, $x$ が文化部に所属している人であるとき,

$x$ は運動部か文化部のどちらかに所属している人　かつ　$x$ は運動部だけに所属している人ではない

と言い換えられる.

$$|A \cup B| - 18 = (40 - |\overline{A \cup B}|) - 18 = (40 - |\overline{A} \cap \overline{B}|) - 18 = (40 - 7) - 18 = 15$$

よって, **文化部に所属している人は 15 人** である. 最後に, 文化部だけに所属している人の人数は $B$ から $A \cap B$ を引いた集合の要素の数に等しいので $15 - 7 =$ **8 人** である.

**問題 004（バリエーション No.1）**

ある会社で, 好きなスポーツについて 100 人に聞いたところ,
サッカーが好きな人は 75 人,
野球が好きな人は 80 人であった.
このとき, サッカーと野球の両方が好きな人の人数の最小値は $\boxed{\text{アイ}}$ 人, 最大値は $\boxed{\text{ウエ}}$ 人である.

サッカーが好きな人の集合を $A$, 野球が好きな人の集合を $B$ とすると,

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 155 - |A \cup B|$$

であるから, サッカーと野球の両方が好きな人の人数が最小になるのは $|A \cup B|$ が最大となるときである. 全体の人数が 100 人であるから $|A \cup B|$ の最大値は 100 である.
よってサッカーと野球の両方が好きな人の人数の最小値は $155 - 100 = 55$ 人である.

またサッカーと野球の両方が好きな人の人数が最大となるのは, サッカーが好きな人の全員が野球も好きであるときなので最大値は 75 人である.

【答】　**最小値は 55 人, 最大値は 75 人**.

**問題 005（バリエーション No.1）**

あるクラスの生徒 42 人のうち,
洋菓子が好きな人は 35 人,
和菓子が好きな人は 30 人であった.
この時. 洋菓子, 和菓子ともに嫌いな人は最大で $\boxed{\text{ア}}$ 人
和菓子と洋菓子ともに好きな人は 最小で $\boxed{\text{イウ}}$ 人, 最大で $\boxed{\text{エオ}}$ 人
洋菓子だけが好きな人は 最小で $\boxed{\text{カ}}$ 人, 最大で $\boxed{\text{キク}}$ 人である.

洋菓子が好きな人の集合を $A$, 和菓子が好きな人の集合を $B$ とすると, 洋菓子, 和菓子ともに嫌いな人の集合は $\overline{A} \cap \overline{B}$ と表せる.

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = 42 - |A \cup B|$$

であるから, $|A \cup B|$ が最小の時, 洋菓子, 和菓子ともに嫌いな人の人数は最大となる.
$|A \cup B|$ が最小となるのは和菓子が好きな人は全員洋菓子も好きであるときで, その時の人数は 35 人である. $42 - 35 = 7$ より, **洋菓子, 和菓子がともに嫌いな人は最大で 7 人** である.

和菓子と洋菓子ともに好きな人の人数が最小となるのは

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 65 - |A \cup B|$$

より, $|A \cup B|$ が最大の時であり, $|A \cup B|$ が最大となるのは $A \cup B$ が全体集合に一致するときである.
$65 - 42 = 23$ より, **和菓子と洋菓子ともに好きな人は最小で 23 人**.
また, $|A \cup B|$ の最小値は 35 人なので $65 - 35 = 30$ より, **和菓子と洋菓子ともに好きな人は最大で 30 人** である.
洋菓子だけが好きな人の人数は

$$|A \cup B| - |B|$$

で表せる. $35 \leqq |A \cup B| \leqq 42$ であるので **洋菓子だけが好きな人は最小で 5 人, 最大で 12 人** である.

**問題 006（バリエーション No.1）**

あるグループ 100 人で,
りんごが好きな人は 50 人,
みかんが好きな人は 13 人,
ももが好きな人は 30 人いた.
りんごとももが両方好きな人は 9 人
みかんとももが両方好きな人は 10 人
りんごとみかんとももが 3 つとも好きな人は 3 人
りんごとみかんとももが 3 つとも嫌いな人は 28 人であるならば
ももだけ好きな人は $\boxed{\text{アイ}}$ 人
りんごとみかん両方好きな人は $\boxed{\text{ウ}}$ 人である.

りんごが好きな人の集合を $A$, みかんが好きな人の集合を $B$, ももが好きな人の集合を $C$ とすると, 仮定から

$$|A| = 50,\ |B| = 13,\ |C| = 30,\ |A \cap C| = 9,\ |B \cap C| = 10,\ |A \cap B \cap C| = 3,\ |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = 28$$

と表せる. ももだけ好きな人の人数は

$$|C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

と表せるので $30 - 9 - 10 + 3 = 14$ より, **ももだけ好きな人は 14 人** である. また

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

より,

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= |A| + |B| + |C| + |A \cap B \cap C| - |B \cap C| - |C \cap A| - |A \cup B \cup C| \\ &= 50 + 13 + 30 + 3 - 9 - 10 - (100 - 28) \\ &= 5 \end{aligned}$$

よって **りんごとみかん両方好きな人は 5 人** である.

**問題 007（バリエーション No.1）**

あるグループ 110 人で, アンケート調査を行った.
このうち女性が 45 人.
女性のうち和菓子が好きな人が 27 人であった.
また, 全体で和菓子が好きな人は 52 人であった.
男性の中で和菓子が好きでない人は $\boxed{\text{アイ}}$ 人である.

女性の集合を $A$, 和菓子が好きな人の集合を $B$ とおく. この時, 仮定から

$$|A| = 45,\ |B| = 52,\ |A \cap B| = 27,$$

が成り立つ. 男性で和菓子が好きでない人の集合は $\overline{A} \cap \overline{B}$ と表せるので

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = 110 - |A \cup B| = 110 - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 110 - 45 - 52 + 27 = 40$$

よって **男性の中で和菓子が好きでない人は 40 人** である.

**【答】　40 人**

**問題 008（バリエーション No.1）**

$U = \{x \mid x$ は 20 以下の自然数 $\}$ を全体集合
$A = \{x \mid x$ は 2 で割ると 1 余る数 $\}$
$B = \{x \mid x$ は 3 で割ると 2 余る数 $\}$
とするとき, $A \cap B$ の集合の要素の個数は $\boxed{\text{ア}}$ 個である.

$n$ を $A \cap B$ の要素とする. $n$ を 6 で割った余りを $r$ とおくと, $n = 6k + r$ であり, 2 で割って 1 余ることから $r$ は $1, 3, 5$ のいずれかである.
他方, $n$ を 3 で割った余りが 2 であることから $r = 5$ であることがわかる. すなわち

$$A \cap B = \{x \mid x \text{ は 6 で割って 5 余る数 }\}$$

と書ける. $0 \leqq 6k + 5 \leqq 20$ かつ $k$ は整数であるから $0 \leqq k \leqq 2$ であり, その数は 3 個である.
(別解)
要素数が高々 20 個なので書き出してみる.

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$$

$$B = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\}$$

であるから

$$A \cap B = \{5, 11, 17\}$$

となりその要素数は 3 個である.

**【答】　3 個**

### 50.11.3　命題

**問題 001（バリエーション No.1）**

次の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを, 下の⓪〜③のうちからひとつ選べ.
$x = 1$ は $x^2 + 2x - 3 = 0$ であるための $\boxed{\text{ア}}$

⓪ 必要条件であるが十分条件でない
① 十分条件であるが必要条件でない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

命題 $p$ を $x = 1$, $q$ を $x^2 + 2x - 3 = 0$ とする. この時

$$p \Longrightarrow q \text{ は真,} \quad q \Longrightarrow p \text{ は偽}$$

である. 実際 $x = 1$ のとき, $1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$ より $q$ が成り立つ.
また, $x^2 + 2x - 3 = 0$ とすると $(x - 1)(x + 3) = 0$ より $x = 1$ または $x = -3$.
$x = -3$ のとき $x \neq 1$ であるから $p$ は成り立たない.
よって $p$ は $q$ であるための十分条件であるが必要条件ではない.

**【答】　十分条件であるが必要条件でない**

**問題 002（バリエーション No.1）**

次の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを, 下の⓪〜③のうちからひとつ選べ.
$x=1$ かつ $y=1$ は $xy=1$ であるための $\boxed{\text{ア}}$

⓪ 必要条件であるが十分条件でない
① 十分条件であるが必要条件でない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

命題 $p$ を $x=1$ かつ $y=1$, $q$ を $xy=1$ とすると

$$p \Longrightarrow q \text{ は真}, \quad q \Longrightarrow p \text{ は偽}$$

である. 実際 $x=y=1$ ならば $xy=1$ であるが, $x=2,\ y=\dfrac{1}{2}$ とすると $q$ は真であるが $p$ は偽である.
よって $p$ は $q$ であるための十分条件であるが必要条件ではない.

**【答】　十分条件であるが必要条件でない**

**問題 003（バリエーション No.1）**

次の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを, 下の⓪〜③のうちからひとつ選べ.
$x, y$ が実数のとき, $x=0$ かつ $y=0$ は $x^2+y^2=0$ であるための $\boxed{\text{ア}}$

⓪ 必要条件であるが十分条件でない
① 十分条件であるが必要条件でない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

命題 $p$ を $x=0$ かつ $y=0$, $q$ を $x^2+y^2=0$ とすると

$$p \Longrightarrow q \text{ は真}, \quad q \Longrightarrow p \text{ は真}$$

である. 実際 $x, y$ がともに実数であるとき, $0 \leqq x^2+y^2$ であり, 等号が成り立つのは $x$ と $y$ がともに $0$ のとき, かつそのときに限るので $p$ と $q$ は同値である.
よって $p$ は $q$ であるための必要十分条件である.

**【答】　必要十分条件である**

**問題 004（バリエーション No.1）**

次の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを, 下の⓪〜③のうちからひとつ選べ.
$x^2=1$ は $x=1$ であるための $\boxed{\text{ア}}$

⓪ 必要条件であるが十分条件でない
① 十分条件であるが必要条件でない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

命題 $p$ を $x^2=1$, $q$ を $x=1$ とすると,

$$p \Longrightarrow q \text{ は偽}, \quad q \Longrightarrow p \text{ は真}$$

である. 実際 $x=-1$ とすると $x^2=1$ であるが $x \neq 1$ であるので $p$ は真であるが $q$ は偽となる.
一方, $x=1$ ならば $x^2=1$ であるから $q$ が真ならば $p$ も真である.
よって $p$ は $q$ であるための必要条件であるが十分条件ではない.

**【答】　必要条件であるが十分条件でない**

**問題 005（バリエーション No.1）**

次の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを, 下の⓪〜③のうちからひとつ選べ.
整数 $x$ について, $x$ が 2 の倍数であることは $x$ が 4 の倍数であるための $\boxed{\text{ア}}$

⓪ 必要条件であるが十分条件でない
① 十分条件であるが必要条件でない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

命題 $p$ を $x$ は 2 の倍数である, $q$ を $x$ は 4 の倍数である. とすると

$$p \Longrightarrow q \text{ は偽}, \quad q \Longrightarrow p \text{ は真}$$

である. 実際 $x=2$ とすると, 2 は 2 の倍数であるが 4 の倍数でない. よってこのとき $q$ は偽となる.
他方, $x$ が 4 の倍数であるとき, $x$ は 2 の倍数でもあるから $q$ ならば $p$ は常に正しい.
よって $p$ は $q$ であるための必要条件であるが十分条件でない.

**【答】　必要条件であるが十分条件でない**

**問題 006（バリエーション No.1）**

次の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを, 下の⓪〜③のうちからひとつ選べ.
三角形の 3 つの角が全て $60^\circ$ であることは, 正三角形であるための $\boxed{\text{ア}}$

⓪ 必要条件であるが十分条件でない
① 十分条件であるが必要条件でない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

三角形の 3 つの角がすべて $60^\circ$ であればその三角形は正三角形であり, また正三角形の 3 つの角はすべて等しく $60^\circ$ である.
よって 3 つの角がすべて $60^\circ$ であることは正三角形であるための必要十分条件である.

**【答】　必要十分条件である**