［コース ID：50］　基礎数学 AI

50.13　2 次関数の最大・最小

50.13.1　2 次関数の最大・最小

問題 001（バリエーション No.1）

次の設問を埋めよ．$\boxed{\text{イ}}$ については下の⓪〜①から当てはまるものを選べ．
2 次関数 $y = 2x^2 - 8x + 8$ は $x = \boxed{\text{ア}}$ のときに $\boxed{\text{イ}}$ となり，その値は $y = \boxed{\text{ウ}}$ である．

⓪ 最大
① 最小

$y = 2x^2 - 8x + 8$ を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 8x + 8 \\ &= 2(x-2)^2 \end{aligned}$$

となるので $x = 2$ の時に y は最小値 0 をとる．

【答】　$x = 2$ の時に 最小 となり，その値は $y = 0$ である．

問題 002（バリエーション No.1）

関数 $y = x^2 - 10x + 10 \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$ は $x = \boxed{\text{アイ}}$ のときに最大値 $\boxed{\text{ウエ}}$，$x = \boxed{\text{オ}}$ のときに最小値 $\boxed{\text{カキ}}$ をとる．

$y = x^2 - 10x + 10$ を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 10x + 10 \\ &= (x-5)^2 - 15 \end{aligned}$$

となる．軸は $x = 5$ であるので $x < 5$ の範囲で $y = x^2 - 10x + 10$ は単調減少である．
よって $x = -2$ のときに最大値 34 をとり，$x = 2$ のとき最小値 -6 をとる．

【答】　$x = -2$ のときに最大値 34，$x = 2$ のときに最小値 -6 をとる．

問題 003（バリエーション No.1）

関数 $y = x^2 - 20x + 9 \quad (7 \leqq x \leqq 13)$ は $x = \boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ のときに最大値 $\boxed{\text{エオカ}}$，$x = \boxed{\text{キク}}$ のときに最小値 $\boxed{\text{ケコサ}}$ をとる．

$y = x^2 - 20x + 9$ を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 20x + 9 \\ &= (x-10)^2 - 91 \end{aligned}$$

となる．よって $x = 7, 13$ のときに最大値 -82，$x = 10$ のときに最小値 -91 をとる．

【答】　$x=7,13$ の時に最大値 -82, $x=10$ のときに最小値 -91 をとる.

問題 004（バリエーション No.1）

関数 $y=x^2-12x+1 \quad (3 \leqq x \leqq 9)$ は $x=$ $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ のときに最大値 $\boxed{\text{ウエオ}}$, $x=$ $\boxed{\text{カ}}$ のときに最小値 $\boxed{\text{キクケ}}$ をとる.
但し, $\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ の解答の順序は問わない.

$y=x^2-12x+1$ を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= x^2-12x+1 \\ &= (x-6)^2-35 \end{aligned}$$

となる．よって $x=3,9$ のときに最大値 -26 をとり, $x=6$ のとき最小値 -35 をとる.

【答】　$x=3,9$ の時に最大値 -26, $x=6$ のときに最小値 -35 をとる.

問題 005（バリエーション No.1）

関数 $y=x^2-20x+7 \quad (8 \leqq x \leqq 13)$ は $x=$ $\boxed{\text{アイ}}$ のときに最大値 $\boxed{\text{ウエオ}}$, $x=$ $\boxed{\text{カキ}}$ のときに最小値 $\boxed{\text{クケコ}}$ をとる.

$y=x^2-20x+7$ を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= x^2-20x+7 \\ &= (x-10)^2-93 \end{aligned}$$

となる．よって $x=8$ と $x=13$ のときの値を比べると $x=13$ のとき最大値 -84 をとることがわかり, $x=10$ のとき最小値 -93 をとる.

【答】　$x=13$ のときに最大値 -84, $x=10$ のときに最小値 -93 をとる.

問題 006（バリエーション No.1）

関数 $y=-x^2-20x+9 \quad (-13 \leqq x \leqq -7)$ は $x=$ $\boxed{\text{アイウ}}$, $\boxed{\text{エオ}}$ のときに最小値 $\boxed{\text{カキク}}$, $x=$ $\boxed{\text{ケコサ}}$ のときに最大値 $\boxed{\text{シスセ}}$ をとる.

$y=-x^2-20x+9$ を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= -x^2-20x+9 \\ &= -(x+10)^2+109 \end{aligned}$$

となる．よって $x=-13,-7$ のときに最小値 100 をとり, $x=-10$ のとき最大値 109 をとる.

【答】　$x=-13,-7$ のとき最小値 100, $x=-10$ のとき最大値 109 をとる.

問題 007（バリエーション No.1）

関数 $y = -x^2 - 12x + 1 \quad (-9 \leqq x \leqq -3)$ は $x =$ $\boxed{\text{アイ}}$, $\boxed{\text{ウエ}}$ のときに最小値 $\boxed{\text{オカ}}$,
$x =$ $\boxed{\text{キク}}$ のときに最大値 $\boxed{\text{ケコ}}$ をとる.
但し $\boxed{\text{アイ}}$ と $\boxed{\text{ウエ}}$ の解答の順序は問わない.

$y = -x^2 - 12x + 1$ を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= -x^2 - 12x + 1 \\ &= -(x+6)^2 + 37 \end{aligned}$$

となる. よって $x = -9, -3$ のときに最小値 28 をとり, $x = -6$ のとき最大値 37 をとる.

【答】　$x = -9, -3$ のとき最小値 28, $x = -6$ のとき最大値 37 をとる.

問題 008（バリエーション No.1）

関数 $y = -x^2 - 20x + 7 \quad (-12 \leqq x \leqq -7)$ は $x =$ $\boxed{\text{アイウ}}$ のときに最大値 $\boxed{\text{エオカ}}$,
$x =$ $\boxed{\text{キク}}$ のときに最小値 $\boxed{\text{ケコ}}$ をとる.

$y = -x^2 - 20x + 7$ を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= -x^2 - 20x + 7 \\ &= -(x+10)^2 + 107 \end{aligned}$$

となる. よって $x = -10$ のときに最大値 107 をとり, $x = -12$ と $x = -7$ のときを比べることで, $x = -7$ のときに最小値 98 をとることが分かる.

【答】　$x = -10$ のときに最大値 107, $x = -7$ のときに最小値 98 をとる.

問題 009（バリエーション No.1）

8cm の金属の板をコの字形に折り曲げて「雨どい」を作るとき, その断面積を最大にする深さは $\boxed{\text{ア}}$ cm であり, そのときの断面積は $\boxed{\text{イ}}$ cm^2 である.

深さを x cm とすると, 底の長さは $(8 - 2x)$ cm である. よって断面積は $x(8 - 2x) = -2x^2 + 8x$ である. 平方完成すると

$$-2x^2 + 8x = -2(x-2)^2 + 8$$

となるので深さ 2cm のときに断面積は最大となり, その大きさは 8cm^2 である.

【答】　深さは 2cm であり, 断面積は 8cm^2.

問題 010（バリエーション No.1）

ある工場の製品の単価が 120 円であるとき, 400 個売れる.
2 円値上げすると, 4 個売り上げが下がることが分かっている.
このとき, 売り上げが最大になる単価は $\boxed{\text{アイウ}}$ 円であり, そのときの売り上げは $\boxed{\text{エオカキク}}$ 円である.

単価を x 円とすると, 単価 120 円から $(x-120)$ 円値上げしたことになる. 2 円値上げすると売り上げが 4 個下がることから, このとき売り上げは 400 個から $4 \times \dfrac{x-120}{2} = 2(x-120)$ 個下がることになる. よって, このときの売り上げは

$$x \times (400 - 2(x-120)) = -2x^2 + 640x$$

円となる.

$$-2x^2 + 640x = -2(x-160)^2 + 51200$$

より, 単価が 160 円のときに売り上げは最大となり, その金額は 51200 円である.

【答】　最大になる単価は 160 円であり, そのときの売り上げは 51200 円である.

問題 011（バリエーション No.1）

直角三角形 ABC の斜辺 AB 上に点 P をとり, P から辺 BC, CA へ垂線を引き, その足をそれぞれ Q, R とする.
$\mathrm{BC}=4,\ \mathrm{CA}=6,\ \mathrm{BQ}=x$ とするとき, 長方形 PQCR の面積 S を x で表すと

$$S = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}x^2 + \boxed{\text{エ}}\,x$$

となり, $x = \boxed{\text{オ}}$ のとき S は最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる.

長方形 PQCR の面積は $S = \mathrm{QC} \times \mathrm{PQ}$ で与えられる. $\mathrm{QC} = \mathrm{BC} - \mathrm{BQ}$ であるから $\mathrm{QC} = 4 - x$ である. また三角形 ABC と三角形 PBQ は相似であるから

$$\mathrm{AC} : \mathrm{PQ} = \mathrm{BC} : \mathrm{BQ}$$

が成り立つ. よって

$$\mathrm{PQ} = \frac{\mathrm{AC} \times \mathrm{BQ}}{\mathrm{BC}} = \frac{6 \times x}{4} = \frac{3}{2}x$$

となるので $S = \dfrac{3}{2}x(4-x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + 6x$ である. 平方完成すると

$$-\frac{3}{2}x^2 + 6x = -\frac{3}{2}(x-2)^2 + 6$$

より面積 S は $x = 2$ のとき最大値 6 をとる.

【答】　$S = \dfrac{-3}{2}x^2 + 6x$ となり, $x = 2$ のとき最大値 $S = 6$ をとる.

問題 012（バリエーション No.1）

ボールを秒速 10m で真上に投げ上げるとき, ボールの高さ y[m] は投げはじめてからの時間 x[秒] の関数として $y = 10x - 5x^2$ の式で表される.
このとき, ボールが最も高い位置に到達する時間は投げはじめてから $\boxed{\text{ア}}$ 秒後で, その高さは $\boxed{\text{イ}}$ m となる.

ボールの高さは $y = 10x - 5x^2$ で表されるので平方完成すると

$$-5x^2 + 10x = -5(x-1)^2 + 5$$

よって $x = 1$ のとき最大値 5 をとる.

【答】　1 秒後, その高さは 5m となる.

問題 013（バリエーション No.1）

建物の屋上から, ボールを鉛直上向きに秒速 10m で真上に投げ上げるとき, 建物の屋上からボールまでの高さ y[m] は, 投げはじめてからの時間 x[秒] の関数として $y = 10x - 5x^2$ の式で表される.
このとき, ボールが最も高い位置に到達する時間は投げはじめてから $\boxed{\text{ア}}$ 秒後で, その高さは屋上から $\boxed{\text{イ}}$ m となる.
また, 投げはじめてから 4 秒後に地面に到達したとすれば, 建物の高さは $\boxed{\text{ウエ}}$ m である.

ボールの高さは $y = 10x - 5x^2$ で表されるので平方完成すると

$$-5x^2 + 10x = -5(x-1)^2 + 5$$

よって $x = 1$ のとき最大値 5 をとる. また 4 秒後の屋上からボールまでの高さは

$$10 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = -40$$

すなわちボールは屋上から真下 40m の位置にある. 4 秒後に地面に到達しているので, 建物の高さは 40m である.

【答】　1 秒後, その高さは屋上から 5m となる. 建物の高さは 40m.