

【コース ID : 50】 基礎数学 AI

50.4 分数式の計算

50.4.1 分数式の計算

問題 001 (バリエーション No.1)

$\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+3x+2}$ を計算すると $\frac{\boxed{\text{ア}}}{(x-\boxed{\text{イ}})(x+\boxed{\text{ウ}})}$ となる.

$$\begin{aligned}\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+3x+2} &= \frac{2}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{2(x+2) + (x-1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{3}{(x-1)(x+2)}\end{aligned}$$

【答】 $\frac{3}{(x-1)(x+2)}$

問題 002 (バリエーション No.1)

$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ を計算すると $\frac{\boxed{\text{ア}}}{x(x+\boxed{\text{イ}})}$ となる.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} &= \frac{(x+2) + x}{x(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{2(x+1)}{x(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{2}{x(x+2)}\end{aligned}$$

【答】 $\frac{2}{x(x+2)}$

問題 003 (バリエーション No.1)

$\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}$ を計算すると $\frac{\boxed{\text{ア}}}{(x+\boxed{\text{イ}})(x+\boxed{\text{ウ}})}$ となる. なお $\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ で解答の順序を問わない.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} &= \frac{(x+3) + (x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{2(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{2}{(x+1)(x+3)}\end{aligned}$$

【答】 $\frac{2}{(x+1)(x+3)}$

問題 004 (バリエーション No.1)

$\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$ を計算すると $\frac{\boxed{\text{ア}}}{x + \boxed{\text{イ}}}$ となる.

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} &= \frac{2x - (x+2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{1}{x+2}\end{aligned}$$

【答】 $\frac{1}{x+2}$

問題 004 (バリエーション No.3)

$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1}$ を計算すると $\frac{\boxed{\text{ア}}}{x + \boxed{\text{イ}}}$ となる.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1} &= \frac{(x-1) - (x+1) + 2x}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{2}{x+1}\end{aligned}$$

【答】 $\frac{2}{x+1}$

問題 004 (バリエーション No.17)

$\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)}$ を計算すると $\frac{\boxed{\text{ア}}}{(x + \boxed{\text{イ}})(x + \boxed{\text{ウ}})}$ となる. なお $\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ で解答の順番を問わない.

最初の二つの項を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} &= \frac{(x+3) + (x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{2(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{2}{(x+1)(x+3)}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} &= \frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{2(x+4) + (x+1)}{(x+1)(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{3(x+3)}{(x+1)(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{3}{(x+1)(x+4)}\end{aligned}$$

【答】 $\frac{3}{(x+1)(x+4)}$

問題 005 (バリエーション No.1)

$\frac{x+2}{2+\frac{3}{x+1}}$ を計算すると $\frac{x^2 + \boxed{\text{ア}}x + \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}x + \boxed{\text{エ}}}$ となる.

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{2+\frac{3}{x+1}} &= \frac{x+2}{\left(\frac{2(x+1)+3}{x+1}\right)} \\ &= \frac{(x+1)(x+2)}{2x+5} \\ &= \frac{x^2+3x+2}{2x+5}\end{aligned}$$

【答】 $\frac{x^2+3x+2}{2x+5}$

問題 005 (バリエーション No.2)

$1 + \frac{x}{1-\frac{14}{x-4}}$ を計算すると $\frac{(x+\boxed{\text{ア}})(x-\boxed{\text{イ}})}{x-\boxed{\text{ウエ}}}$ となる.

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{x}{1 - \frac{14}{x-4}} &= 1 + \frac{x}{\frac{(x-4)-14}{x-4}} \\
 &= 1 + \frac{x(x-4)}{x-18} \\
 &= \frac{(x-18) + (x^2 - 4x)}{x-18} \\
 &= \frac{x^2 - 3x - 18}{x-18} \\
 &= \frac{(x+3)(x-6)}{x-18}
 \end{aligned}$$

【答】 $\frac{(x+3)(x-6)}{x-18}$

問題 005 (バリエーション No.4)

$\frac{x-2}{2 - \frac{5x}{x^2+1}} + 2$ を計算すると $\frac{x^2 + \boxed{\text{ア}}x - \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}x - \boxed{\text{エ}}}$ となる.

$$\begin{aligned}
 \frac{x-2}{2 - \frac{5x}{x^2+1}} + 2 &= \frac{x-2}{\frac{2(x^2+1) - 5x}{x^2+1}} + 2 \\
 &= \frac{(x-2)(x^2+1)}{2x^2 - 5x + 2} + 2 \\
 &= \frac{(x^3 - 2x^2 + x - 2) + 2(2x^2 - 5x + 2)}{(2x-1)(x-2)} \\
 &= \frac{x^3 + 2x^2 - 9x + 2}{(2x-1)(x-2)}
 \end{aligned}$$

ここで $f(x) = x^3 + 2x^2 - 9x + 2$ とおくと, $f(2) = 8 + 8 - 18 + 2 = 0$ となるので因数定理から $f(x)$ は $x-2$ を因数に持つ.

$f(x)$ を $x-2$ で割ると商は $x^2 + 4x - 1$ となるので $f(x) = (x-2)(x^2 + 4x - 1)$ と因数分解できる. よって

$$\begin{aligned}
 \frac{x-2}{2 - \frac{5x}{x^2+1}} + 2 &= \frac{(x-2)(x^2 + 4x - 1)}{(2x-1)(x-2)} \\
 &= \frac{x^2 + 4x - 1}{2x-1}
 \end{aligned}$$

【答】 $\frac{x^2 + 4x - 1}{2x - 1}$

問題 006 (バリエーション No.1)

自然数 k, m が

$$2 + \frac{1}{k + \frac{1}{m + \frac{1}{5}}} = \frac{803}{371}$$

を満たせば, $k = \boxed{\text{ア}}$, $m = \boxed{\text{イウ}}$ である.

両辺から 2 を引くと

$$\frac{1}{k + \frac{1}{m + \frac{1}{5}}} = \frac{803 - 742}{371} = \frac{61}{371}$$

逆数をとると

$$k + \frac{1}{m + \frac{1}{5}} = \frac{371}{61} = 6 + \frac{5}{61}$$

ここで k, m は自然数なので, 特に $0 < \frac{1}{m + \frac{1}{5}} < 1$ が成り立つ. よって

$$k = 6, \quad \frac{1}{m + \frac{1}{5}} = \frac{5}{61}$$

 $m + \frac{1}{5} = \frac{61}{5}$ より $m = 12$ となる.**【答】** $k = 6, m = 12$