［コース ID：50］　基礎数学 AI

50.9　恒等式、等式の証明

50.9.1　恒等式

問題 001（バリエーション No.1）

$3x^2 - 2x - 1 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$ が x についての恒等式であるとき,
$a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イウ}}$, $c = \boxed{\text{ウ}}$ である.

右辺を展開すると $ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c)$ であるので各項の係数を比べることで
$a = 3,\ b = -2 - 2a = -8,\ c = -1 - a - b = 4$ を得る.
(別解 1)
次数の大きい項から順に $(x+1)$ の項を作っていく.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2x - 1 &= \bigl(3(x+1)^2 - 6x - 3\bigr) - 2x - 1 \\ &= 3(x+1)^3 - 8x - 4 \\ &= 3(x+1)^2 - 8(x+1) + 8 - 4 \\ &= 3(x+1)^2 - 8(x+1) + 4 \end{aligned}$$

よって $a = 3, b = -8, c = 4$ である.
注意： これは, まず左辺を $(x+1)^2$ で割った余りを計算し, その余りを次に $(x+1)$ で割る, というような計算に相当している.
(別解 2)
x についての恒等式であるので, x にどんな値を代入しても等式が成り立つ. $x = -1$ を代入すると

$$3(-1)^2 - 2(-1) - 1 = c$$

よって $c = 4$ を得る. $c = 4$ を代入して整理すると $3x^2 - 2x - 5 = a(x+1)^2 + b(x+1)$ となる. ここで

$$3x^2 - 2x - 5 = (x+1)(3x-5)$$

であるから両辺を $(x+1)$ で割ると $3x - 5 = a(x+1) + b$ となるので再び $x = -1$ を代入して $b = -8$. 代入すると $a = 3$ であることがわかる.

【答】　$\boldsymbol{a = 3, b = -8, c = 4}$

問題 002（バリエーション No.1）

$2x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ が x についての恒等式であるとき
$a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イウ}}$, $c = \boxed{\text{エオ}}$, $d = \boxed{\text{カキ}}$ である.

右辺を展開すると

$$ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a+2b+c)x + (a+b+c+d)$$

となる。各項の係数を比べることで
$a = 2,\ \ b = -3 - 3a = -9,\ \ c = 3 - 3a - 2b = 15,\ \ d = 7 - a - b - c = -1$ を得る.

(別解 1)
次数の大きい項から順に $(x+1)$ の項を作っていく.

$$\begin{aligned}2x^3-3x^2+3x+7 &= \big(2(x+1)^3-6x^2-6x-2\big)-3x^2+3x+7\\ &= 2(x+1)^3-9x^2-3x+5\\ &= 2(x+1)^3-\big(9(x+1)^2-18x-9\big)-3x+5\\ &= 2(x+1)^3-9(x+1)^2+15x+14\\ &= 2(x+1)^3-9(x+1)^2+15(x+1)-15+14\\ &= 2(x+1)^3-9(x+1)^2+15(x+1)-1\end{aligned}$$

よって $a=2,\ b=-9,\ c=15,\ d=-1$ である.
注意：これは, まず左辺を $(x+1)^3$ で割った余りを計算し, 次にその余りを $(x+1)^2$ で割った余りを計算し, 最後にその余りを $(x+1)$ で割る, というような計算に相当している.
(別解 2)
x についての恒等式なので x にどの値を代入しても等式が成り立たなければならない. 両辺に $x=-1$ を代入すると,

$$2(-1)^3-3(-1)^2+3(-1)+7=d$$

より $d=-1$ である. 代入して整理すると $2x^3-3x^2+3x+8=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)$ となる. ここで左辺は $x+1$ を因数に持ち

$$2x^3-3x^2+3x+8=(x+1)(2x^2-5x+8)$$

であるので両辺を $(x+1)$ で割れば $2x^2-5x+8=a(x+1)^2+b(x+1)+c$ を得る. 両辺に $x=-1$ を代入すると

$$2(-1)^2-5(-1)+8=c$$

よって $c=15$ となる. 再び代入して整理すると $2x^2-5x-7=a(x+1)^2+b(x+1)$ であり, 両辺を $(x+1)$ で割ると

$$2x-7=a(x+1)+b$$

これを解けば $a=2,\ b=-9$ を得る.

【答】　$\boldsymbol{a=2, b=-9, c=15, d=-1}$

問題 003（バリエーション No.1）

$a(x+5)(x+4)+b(x+4)(x+3)+c(x+3)(x+5)=-4$ が x についての恒等式であるとき
$a=$ [アイ] $, b=$ [ウエ] $, c=$ [オ] である.

左辺を展開して整理すると $(a+b+c)x^2+(9a+7b+8c)x+(20a+12b+15c)=-4$ となる.

連立一次方程式 $\begin{cases}a+b+c=0\\ 9a+7b+8c=0\\ 20a+12b+15c=-4\end{cases}$ を解くと, $a=-2, b=-2, c=4$ が得られる.

(別解)
x についての恒等式なので x にどの値を代入しても等式が成り立たなければならない.
$x=-3$ を代入すると, $2a=-4$ より $a=-2$
$x=-5$ を代入すると, $2b=-4$ より $b=-2$
$x=-4$ を代入すると, $-c=-4$ より $c=4$ となる.

【答】　$\boldsymbol{a=-2, b=-2, c=4}$

問題 004（バリエーション No.1）

$\dfrac{-9}{(4x+1)(2x-4)} = \dfrac{a}{4x+1} + \dfrac{b}{2x-4}$ が x についての恒等式であるとき
$a =$ [ア] $, b =$ [イウ] である.

右辺 $= \dfrac{a(2x-4)+b(4x+1)}{(4x+1)(2x-4)} = \dfrac{(2a+4b)x+(-4a+b)}{(4x+1)(2x-4)}$ であるから両辺の分子を比較して

$$2a+4b=0\ ,\quad -4a+b=-9$$

となる. $a=-2b$ より $9b=-9$, よって $b=-1,\ a=2$ である.
(別解)
両辺の分子を比較すると

$$a(2x-4)+b(4x+1)=-9$$

となるので $x=2$ を代入すると $9b=-9$ より $b=-1$, $x=-\dfrac{1}{4}$ を代入すると $-\dfrac{9}{2}a=-9$ より $a=2$ を得る.

【答】　$\boldsymbol{a=2, b=-1}$

問題 005（バリエーション No.1）

$\dfrac{6}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-2}$ が x についての恒等式であるとき
$a =$ [アイ] $, b =$ [ウ] $, c =$ [エ] である.

$$\begin{aligned}右辺 &= \frac{a(x+1)(x-2)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{(a+b+c)x^2+(-a-3b)x+(-2a+2b-c)}{(x-1)(x+1)(x-2)}\end{aligned}$$

であるから両辺の分子を比べると

$$a+b+c=0,\quad -a-3b=0,\quad -2a+2b-c=6$$

を得る. $a=-3b,\ c=-a-b=2b$ より, $-2a+2b-c=6b+2b-2b=6b=6$.
よって $b=1, a=-3,\ c=2$ を得る.
(別解)
両辺の分子を比較すると

$$a(x+1)(x-2)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)(x+1)=6$$

が成り立つことがわかる. $x=1,-1,2$ をそれぞれ代入すると $a=-3,\ b=1,\ c=2$ を得る.

【答】　$\boldsymbol{a=-3,\ b=1,\ c=2}$

50.9.2　等式の証明