［コース ID：50］　基礎数学 AI

50.14　2 次関数と 2 次方程式・2 次不等式

50.14.1　2 次関数と 2 次方程式

問題 001（バリエーション No.1）

2 次関数 $y = x^2 + 3x - 4$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は $\boxed{\text{アイ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ である.

$y = 0$ とすると

$$x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1) = 0$$

であるから $x = -4, 1$ である.

【答】　-4 と 1

問題 002（バリエーション No.1）

2 次関数 $y = x^2 + 9x + 20$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は $\boxed{\text{アイ}}$ と $\boxed{\text{ウエ}}$ である.
但し $\boxed{\text{アイ}}$ と $\boxed{\text{ウエ}}$ の解答の順序は問わない.

$y = 0$ とすると

$$x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5) = 0$$

より $x = -5, -4$ である.

【答】　-5 と -4

問題 003（バリエーション No.1）

次の設問を埋めよ. $\boxed{\text{ア}}$ については下の⓪, ①からあてはまるものを選べ.
2 次関数 $y = x^2 + 2x + k$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるとき, 定数 k のとりうる値の範囲は k $\boxed{\text{ア}}$ $\boxed{\text{イ}}$ であり, x 軸と接する場合は $k =$ $\boxed{\text{ウ}}$ である.

⓪ $>$
① $<$

判別式は $D = 4 - 4k$ なので, x 軸と異なる 2 点で交わるとき, $D > 0$ より $k < 1$ である.
また, x 軸と接するとき, $D = 0$ なので $k = 1$ である.

【答】　異なる 2 点で交わるとき $k < 1$ であり, 接する場合は $k = 1$ である.

問題 004（バリエーション No.1）

2 次関数 $y = x^2 + kx + 4$ のグラフが x 軸と接するとき, 定数 k の値は $k = \pm$ $\boxed{\text{ア}}$ となる.

判別式は $D = k^2 - 16$ である. x 軸と接するとき, $D = 0$ であるから $k = \pm 4$ である.

【答】　$\boldsymbol{k = \pm 4}$

問題 005（バリエーション No.1）

2 次関数 $y = x^2 + 4x - 5$ のグラフと x 軸との交点を A,B とすると, 線分 AB の長さは $\boxed{\text{ア}}$ である.

$y = 0$ とすると

$$x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1) = 0$$

より $x = -5, 1$ である．よって線分 AB の長さは $(1 - (-5)) = 6$ となる.

【答】　**6**

50.14.2　2 次関数と 2 次不等式

問題 001（バリエーション No.1）

周の長さが 8m の長方形において, 横の辺の長さを x [m] とすると, その面積 S [m^2] を x を用いて表すと $S = -x^2 + \boxed{\text{ア}}\, x$ である.
ここで面積 S が 3m^2 以上となるような x の値の範囲は $\boxed{\text{イ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ウ}}$ である.
また, S の最大値は $\boxed{\text{エ}}$ m^2 であり, そのときの x の値は $\boxed{\text{オ}}$ m となる.

横の辺の長さが x であるとき, 縦の辺の長さは $\dfrac{8-2x}{2} = 4 - x$ である．よって面積は

$$\begin{aligned} S &= x(4-x) \\ &= -x^2 + 4x \end{aligned}$$

である．$3 \leqq -x^2 + 4x$ とすると

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \leqq 0$$

となるから $1 \leqq x \leqq 3$ である．また

$$-x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$$

であるから $x = 2$ のとき, 最大値 4 をとる.

【答】　$\boldsymbol{S = -x^2 + 4x}$. **$\boldsymbol{3 \leqq S}$ のとき,$\boldsymbol{1 \leqq x \leqq 3}$. $\boldsymbol{x}$ が 2m のとき, $\boldsymbol{S}$ は最大値 4m^2 をとる**.

問題 002（バリエーション No.1）

周の長さが 8m の長方形において, 横の辺の長さを x [m] とすると, その面積 S [m^2] を x を用いて表すと $S = -x^2 + \boxed{\text{ア}}\, x$ である.
ここで面積 S が 3m^2 以下となるような x の値の範囲は
$0 < x \leqq \boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}} \leqq x < \boxed{\text{エ}}$ となる.

横の辺の長さが x であるとき, 縦の辺の長さは $\dfrac{8-2x}{2} = 4 - x$ である．よって面積は

$$\begin{aligned} S &= x(4-x) \\ &= -x^2 + 4x \end{aligned}$$

である．$-x^2+4x \leqq 3$ とすると

$$0 \leqq x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

周の長さが 8cm であることから $0<x<4$ に注意して $0<x \leqq 1,\ 3 \leqq x<4$ となる．

【答】　$S=-x^2+4x$．$S \leqq 3$ となる x の値の範囲は $0<x \leqq 1$, $3 \leqq x<4$．

問題 003（バリエーション No.1）

直径 x[m] の円板から，同じ中心を持つ半径 2m の円をくりぬいた板を考えるとき，その面積 $S[\mathrm{m}^2]$ を x を用いて表すと $S=\dfrac{\pi x^2}{4}-$ ア π となる．
このとき $12\pi \leqq S \leqq 32\pi$ となるような x の値の範囲は イ $\leqq x \leqq$ ウエ となる．

半径 2 の円の面積は 4π なので $S=\dfrac{\pi x^2}{4}-4\pi$ である．

$$12\pi \leqq \frac{\pi x^2}{4}-4\pi \leqq 32\pi$$

整理とすると，$64 \leqq x^2 \leqq 144$ となる．x は正の数であるから $8 \leqq x \leqq 12$ を得る．

【答】　$S=\dfrac{\pi x^2}{4}-4\pi$，$x$ の値の範囲は $8 \leqq x \leqq 12$

問題 004（バリエーション No.1）

幅 12cm の金属の板をコの字形に折り曲げたとき，折り曲げた両端の長さを x [cm] とすると，その断面積 S [cm^2] を x を用いて表すと $S=-2x^2+$ アイ x である．
ここで面積 S が 16cm^2 以上となるような x の値の範囲は ウ $\leqq x \leqq$ エ である．
また，S の最大値は オカ cm^2 であり，そのときの x の値は キ cm となる．

折り曲げた両端の長さを x とすると，底の長さは $12-2x$ である．よって断面積は

$$S=x(12-2x)=-2x^2+12x$$

である．$16 \leqq -2x^2+12x$ とすると

$$2x^2-12x+16=2(x-2)(x-4) \leqq 0$$

より $2 \leqq x \leqq 4$ である．また

$$-2x^2+12x=-2(x-3)^2+18$$

であるから断面積 S は $x=3$ のとき，最大値 18 をとる．

【答】　$S=-2x^2+12x$，$16 \leqq S$ のとき $2 \leqq x \leqq 4$，$x=3$ のとき，S は最大値 18cm^2 をとる．

問題 005（バリエーション No.1）

ある工場の製品の単価が 120 円であるとき，400 個売れる．
2 円値上げすると，4 個売り上げが下がることが分かっている．
このとき，売り上げが 51000 円以上となる単価は アイウ 円以上，エオカ 円以下の範囲である．

単価を x としたとき, 120 円から $(x-120)$ 円値上げしたことになるので製品を売り上げた数は

$$400-4\times\frac{x-120}{2}=640-2x$$

と表される. 売り上げが 51000 円以上であることから

$$51000\leqq x(640-2x)=-2x^2+640x$$

を得る. 整理すると $x^2-320x+25500\leqq 0$ であり,

$$x^2-320x+25500=(x-150)(x-170)$$

なので $150\leqq x\leqq 170$ である.

【答】　150 円以上, 170 円以下.

問題 006（バリエーション No.1）

ある物体を秒速 20m で真上に投げ上げるとき, 物体の高さ y[m] は, 投げはじめてからの時間 x[秒] の関数として $y=20x-5x^2$ の式で表される.
投げ上げた物体が高さ 15m 以上である時間は投げ上げてから $\boxed{\text{ア}}$ 秒後から $\boxed{\text{イ}}$ 秒の間である. また, $\boxed{\text{ウ}}$ 秒後に最も高い位置に到達し, その高さは $\boxed{\text{エオ}}$ m となる.

物体の高さは $y=20x-5x^2$ で表されるので, $15\leqq 20x-5x^2$ とすると

$$5x^2-20x+15=5(x-1)(x-3)\leqq 0$$

よって $1\leqq x\leqq 3$ である. また

$$-5x^2+20x=-5(x-2)^2+20$$

であるから y は $x=2$ で最大値 20 をとる.

【答】　15m 以上である時間は 1 秒後から 3 秒の間. 2 秒後に最も高い位置に到達し, その高さは 20m となる.