［コース ID：50］　基礎数学 AI

50.8　いろいろな方程式

50.8.1　いろいろな方程式

問題 001（バリエーション No.1）

方程式 $x^4-5x^2+4=0$ の 4 つの解をそれぞれ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$(ただし, $\alpha<\beta<\gamma<\delta$) とするとき
$\alpha=$ $\boxed{\text{アイ}}$
$\beta=$ $\boxed{\text{ウエ}}$
$\gamma=$ $\boxed{\text{オ}}$
$\delta=$ $\boxed{\text{カ}}$ である.

$x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=0$ より $x=\pm1,\pm2$ である.

【答】　$\boldsymbol{\alpha=-2,\beta=-1,\gamma=1,\delta=2}$

問題 001（バリエーション No.2）

方程式 $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$ の 4 つの解をそれぞれ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$(ただし, $\alpha<\beta<\gamma<\delta$) とするとき
$\alpha=$ $\boxed{\text{アイ}}$
$\beta=$ $\boxed{\text{ウ}}$
$\gamma=$ $\boxed{\text{エ}}$
$\delta=$ $\boxed{\text{オ}}$ である.

$$f(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$$

とすると, $f(1)=1-5+5+5-6=0$ より $f(x)$ は $(x-1)$ を因数に持つ．$f(x)$ を $x-1$ で割れば $f(x)=(x-1)(x^3-4x^2+x+6)$ であることがわかる．次に

$$g(x)=x^3-4x^2+x+6$$

とすると $g(-1)=-1-4-1+6=0$ である．よって $g(x)$ は $(x+1)$ を因数に持つ．同様に $g(x)$ を $x+1$ で割ることで $g(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$ であることがわかる．
最後に $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ と因数分解できるので結局

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)$$

と因数分解できる．よって 4 つの解は $x=-1,1,2,3$ である．

【答】　$\boldsymbol{\alpha=-1,\beta=1,\gamma=2,\delta=3}$

問題 002（バリエーション No.1）

方程式 $x^5-5x^3+4x=0$ の解は $x=0,\pm$ $\boxed{\text{ア}}$, $\pm$ $\boxed{\text{イ}}$ である．ただし, $\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ の解答の順序は問わない.

$x^5-5x^3+4x=x(x^4-5x^2+4)=x(x^2-1)(x^2-4)=x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=0$ より $x=0,\ \pm1,\ \pm2$ である.

【答】 $\boldsymbol{x=\pm1,\pm2}$

問題 003（バリエーション No.1）

連立一次方程式 $\begin{cases}4x+3y-4z=24\\2x+5y+3z=21\\2x-4y+4z=-16\end{cases}$ の解は $x=$ ア ,$y=$ イ ,$z=$ ウエ である.

第 1 式と第 3 式を足すと $6x-y=8$, すなわち $y=6x-8$ である.
また, 第 2 式から第 3 式を引くと $9y-z=37$, すなわち $z=9y-37=54x-109$ である.
これらを第 1 式に代入すると $4x+3(6x-8)-4(54x-109)=24$, 整理すると

$$194x=388$$

を得る. これより $x=2,\ y=12-8=4,\ z=108-109=-1$ がわかる.

【答】 $\boldsymbol{x=2,y=4,z=-1}$

問題 004（バリエーション No.1）

連立方程式 $\begin{cases}x+y=-1\\x^2-2y^2+2y-4=0\end{cases}$ の解 (x,y) は
$(x,y)=(-2,$ ア $)$ または $($ イウ , エ $)$ である.

$x=-y-1$ より, $(-y-1)^2-2y^2+2y-4=0$ が成り立つ. 整理すると

$$y^2-4y+3=0$$

となるので, $y=1,3$ である. $x=-y-1$ にそれぞれ代入すれば 2 解 $(x,y)=(-2,1),(-4,3)$ を得る.

【答】 $\boldsymbol{(x,y)=(-2,1)}$ **または** $\boldsymbol{(-4,3)}$

問題 005（バリエーション No.1）

方程式 $|2x+3|=11$ の解は $x=$ ア , イウ である.

$2x+3=11$ を解くと $x=4$ であり, $2x+3=-11$ を解くと $x=-7$ である.

【答】 $\boldsymbol{x=4,-7}$

問題 006（バリエーション No.1）

方程式 $\sqrt{x+2}=x-10$ の解は $x=$ アイ である.

両辺を 2 乗すると $x+2=(x-10)^2=x^2-20x+100$ なので整理すると $x^2-21x+98=0$ となる. これを解くと $x=7,14$ を得るが, $0 \leq x-10$ より $x=7$ は解ではない. よって $x=14$ である.

【答】 $\boldsymbol{x=14}$

問題 007（バリエーション No.1）

a,b を実数の定数とする. 方程式 $x^3+ax+b=0$ の 1 つの解が $1+2i$ (i は虚数単位) のとき, $a=$ ア , $b=$ イウ であり, この方程式の他の解は $x=$ エオ , カ $-$ キ i である.

$x=1+2i$ は解であるので $(1+2i)^3+a(1+2i)+b=0$ である. この式を整理すると

$$(-11+a+b)+(-2+2a)i=0$$

を得る. 実部と虚部がそれぞれ 0 になるので $a=1, b=10$ であることがわかる.
$f(x)=x^3+x+10$ とすると

$$f(-2)=-8-2+10=0$$

より $f(x)$ は $x+2$ を因数に持つ. $f(x)=(x+2)(x^2-2x+5)$ より $x^2-2x+5=0$ を解いて

$$x=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=1\pm 2i$$

を得る. よって $f(x)$ は解 $x=-2, 1\pm 2i$ を持つ.

【答】 $\boldsymbol{a=1, b=10}$**. 他の解は** $\boldsymbol{x=-2, 1-2i}$