

【コース ID : 49】 基礎数学 AII

49.8 常用対数

49.8.1 常用対数

問題 001 (バリエーション No.1)

$\log_{10} 5$ の値を, 小数第 4 位を四捨五入して求めると 0. アイウ となる.
ただし, 必要ならば $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて良い.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \text{ を用いると}$$

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2$$

である. $\log_{10} 10 = 1$, $\log_{10} 2 = 0.3010$ より

$$\log_{10} 5 = 1 - 0.3010 = 0.699$$

である.

【答】 0.699

問題 002 (バリエーション No.1)

以下の設問に $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ として自然数で答えよ.
半減期が 8 日であるヨウ素 131 が初めの $1/10$ 以下になるのには アイ 日かかる.
※半減期とは元素の半分が崩壊して別の元素に変化するまでにかかる時間

半減期が 8 日であることから, n 日後のヨウ素の数は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{8}}$$

と表せる. $\frac{1}{10}$ 以下になるのは

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{8}} \leq \frac{1}{10}$$

なので両辺の対数をとると

$$\frac{n}{8} \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right) \leq \log_{10} \left(\frac{1}{10}\right)$$

$\log_{10} \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_{10} x$ であるから整理すると

$$n \geq \frac{8}{\log_{10} 2} = 26.5 \dots$$

よって $\frac{1}{10}$ 以下になるのは 27 日後である.

【答】 27 日

問題 003 (バリエーション No.1)

以下の空欄を埋めよ。ただし、必要ならば

$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$, $\log_{10} 11 = 1.0414$ を用いて良い。

ガラスにあるフィルムを 1 枚貼ると、紫外線を 10% 遮断できる。このフィルムを アイ 枚以上貼ると、紫外線を $1/10$ 以下にできる。

フィルムを 1 枚貼ると紫外線を 10% 遮断するので、ガラスを通り抜ける紫外線の量は全体の 90% である。よってフィルムを n 枚貼れば通り抜ける紫外線の量は全体の $\left(\frac{90}{100}\right)^n \times 100\%$ である。

これを $\frac{1}{10}$, すなわち 10% 以下にしたいので

$$\left(\frac{90}{100}\right)^n \leq \frac{1}{10}$$

となればよい。両辺の対数をとると

$$n(\log_{10} 9 - \log_{10} 10) \leq \log_{10} \frac{1}{10}$$

$\log_{10} \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_{10} x$ より整理すると

$$n \geq \frac{1}{\log_{10} 10 - 2\log_{10} 3} = \frac{1}{1 - 0.9542} = 21.8 \dots$$

よって 22 枚以上貼ればよい。

【答】 22 枚

問題 004 (バリエーション No.1)

以下の空欄を埋めよ。ただし、必要ならば

$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$, $\log_{10} 11 = 1.0414$ を用いて良い。

毎年 5% の経済成長をしている A 国と、A 国の 2 倍の経済力を持つがまったく経済成長できない B 国があるとき、A 国の経済が B 国を追い越すのは アイ 年後からであろう。

現在の A 国の経済力を E とすると、 n 年後の A 国の経済力は $\left(\frac{105}{100}\right)^n \times E$, B 国の経済力は $2E$ と表せるので

$$\left(\frac{105}{100}\right)^n \times E \geq 2E$$

を満たす最小の n を求めればよい。両辺の対数をとって

$$n(\log_{10} 105 - \log_{10} 100) \geq \log_{10} 2$$

ここで $105 = 3 \times 5 \times 7 = \frac{3 \times 7 \times 10}{2}$ であるから

$$\log_{10} 105 = \log_{10} 3 + \log_{10} 7 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 2.0212$$

である。よって

$$n \geq \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 105 - \log_{10} 100} = \frac{0.3010}{2.0212 - 2} = 14.1 \dots$$

より A 国が B 国を追い越すのは 15 年後である。

【答】 15 年後

問題 005 (バリエーション No.1)

以下の空欄を埋めよ. ただし, 必要ならば $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて良い.
 3^{10} は 桁の整数である.

一般に自然数 n が k 桁であるとき,

$$10^{k-1} \leq n < 10^k$$

が成り立つ. $n = 3^{10}$ として対数をとると

$$(k-1)\log_{10} 10 \leq 10\log_{10} 3 < k\log_{10} 10$$

$$10\log_{10} 3 = 4.771 \text{ より}$$

$$k-1 \leq 4.771 < k$$

よって $k = 5$ である.

【答】 5 桁

問題 006 (バリエーション No.1)

以下の空欄を埋めよ. ただし, 必要ならば $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて良い.
 $\left(\frac{1}{8}\right)^{20}$ は小数第 位にはじめて 0 でない数が現れる.

一般に正の実数 x が小数第 k 位に初めて 0 でない数が現れるとすると

$$10^{-k} \leq x < 10^{-(k-1)}$$

が成り立つ. $x = \left(\frac{1}{8}\right)^{20} = (2^{-3})^{20} = 2^{-60}$ として対数をとると

$$-k \leq -60\log_{10} 2 < -(k-1)$$

$$-60\log_{10} 2 = -18.06 \text{ であるから}$$

$$k-1 < 18.06 \leq k$$

よって $k = 19$ である.

【答】 第 19 位