

【コース ID : 48】 基礎数学 BI

48.5 2 次曲線の接線

48.5.1 2 次曲線の接線

問題 001 (バリエーション No.1)

点 $(-2, 4)$ から曲線 $x^2 + y^2 = 2$ へ引いた接線の方程式は

$y =$ $x +$ および、

$y =$ $x +$ である。

求める接線の方程式を $y = ax + b$ とおくと点 $(-2, 4)$ を通ることから $4 = -2a + b$, すなわち

$$b = 2a + 4$$

である. $y = ax + (2a + 4)$ を $x^2 + y^2 = 2$ に代入すると

$$x^2 + (ax + (2a + 4))^2 = 2$$

この式を展開して整理すると

$$(a^2 + 1)x^2 + 2a(2a + 4)x + (4a^2 + 16a + 14) = 0$$

接線と曲線は唯一つの共有点 (接点) を持つので, 上の 2 次方程式は唯一つの解を持つ. このとき判別式 D を考えると, $D = 0$ であるから

$$\begin{aligned} D &= 4a^2(2a + 4)^2 - 4(a^2 + 1)(4a^2 + 16a + 14) \\ &= 4((4a^4 + 16a^3 + 16a^2) - (4a^4 + 16a^3 + 18a^2 + 16a + 14)) \\ &= 4(-2a^2 - 16a - 14) \\ &= -8(a + 1)(a + 7) = 0 \end{aligned}$$

よって, $a = -1, -7$ を得る. $b = 2a + 4$ であるから, 接線の方程式は

$$y = -x + 2$$

$$y = -7x - 10$$

【答】 $y = -7x - 10, y = -x + 2$

問題 002 (バリエーション No.1)

円 $x^2 + y^2 = 9$ と直線 $y = x + 3$ の共有点の座標は

(,) および (,) である。

$y = x + 3$ を $x^2 + y^2 = 9$ に代入すると

$$x^2 + (x + 3)^2 = 9$$

この式を展開して整理すると

$$2x(x + 3) = 0$$

より $x = -3, 0$ である. $y = x + 3$ であるから

$$x = -3 \text{ のとき } y = -3 + 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ のとき } y = 0 + 3 = 3$$

よって, 共有点の座標は $(-3, 0)$, $(0, 3)$ である.

【答】 $(0, 3)$, $(-3, 0)$

問題 003 (バリエーション No.32)

円 $x^2 + y^2 = 25$ と直線 $y = x - 7$ の共有点の座標は

(,) および (,) である.

但し, (,) と (,) の回答の順序は問わない.

$y = x - 7$ を $x^2 + y^2 = 25$ に代入すると

$$x^2 + (x - 7)^2 = 25$$

この式を展開して整理すると

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

ここで $2x^2 - 14x + 24 = 2(x - 3)(x - 4) = 0$ より $x = 3, 4$ である. $y = x - 7$ であるから

$$x = 3 \text{ のとき } y = 3 - 7 = -4$$

$$x = 4 \text{ のとき } y = 4 - 7 = -3$$

よって, 共有点の座標は $(3, -4)$, $(4, -3)$ である.

【答】 $(3, -4)$, $(4, -3)$

問題 004 (バリエーション No.50)

曲線 $x^2 + y^2 = 90$ と直線 $y = -3x + 30$ の共有点の座標は (,) である.

$y = -3x + 30$ を $x^2 + y^2 = 90$ に代入して整理すると

$$10x^2 - 180x + 810 = 0$$

である. $10x^2 - 180x + 810 = 10(x - 9)^2 = 0$ より $x = 9$ を得る. $y = -3x + 30$ に代入すると $y = 3$.
よって共有点の座標は $(9, 3)$ である.

【答】 $(9, 3)$

問題 005 (バリエーション No.1)

曲線 $y^2 = 4x$ と直線 $y = x + a$ が接するとき, $a =$ である.

$y = x + a$ を $y^2 = 4x$ に代入すると $(x + a)^2 = 4x$ であるので展開して整理すると

$$x^2 + 2(a - 2)x + a^2 = 0$$

直線 $y = x + a$ が接するとき、その共有点は接点唯一つなので、この 2 次方程式は唯一つの解を持つ。
判別式 D を考えると

$$\begin{aligned} D &= 4(a - 2)^2 - 4a^2 \\ &= 4(-4a + 4) \end{aligned}$$

なので、 $D = 0$ とすれば $a = 1$ を得る。

【答】 $a = 1$

問題 006 (バリエーション No.1)

曲線 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1$ に直線 $y = -8x + k$ が接するとき、 $k =$ である。

$y = -8x + k$ を $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1$ に代入して両辺に 30 をかけると

$$3x^2 - 2(-8x + k)^2 = 30$$

この式を展開して整理すれば

$$125x^2 - 32kx + (2k^2 + 30) = 0$$

判別式を D とすると、2 つの図形が接するとき、 $D = 0$ であるから

$$\begin{aligned} D &= 32^2k^2 - 4 \times 125(2k^2 + 30) \\ &= (1024 - 1000)k^2 - 15000 \\ &= 24k^2 - 15000 = 0 \end{aligned}$$

$k^2 = 625$ より $k = \pm 25$ である。

【答】 $k = \pm 25$