

## 【コース ID : 45】 線形代数 II

## 45.7 行列の階数

## 45.7.1 行列の階数

## 問題 001 (バリエーション No.1)

以下の設問で、空欄  は後の選択肢からあてはまるものを選び、その番号をマークせよ。

行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  の階数は、

$\text{rank} A =$

である。従って、この行列  $A$  は .

の選択肢：

① 正則である

② 正則ではない

2 行目に 1 行目  $\times 4$ , 3 行目に 1 行目  $\times 3$  を加えて

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 20 & -10 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

2 行目を  $\div 10$ , 3 行目を  $\div 6$  すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3 行目から 2 行目を引くと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって、 $\text{rank } A = 2$  となる。

$A$  は 3 次の正方行列で、 $\text{rank } A = 2 \neq 3$  なので、正則でない。

【答】  2,  ②

## 問題 002 (バリエーション No.1)

以下の設問で、空欄  は後の選択肢からあてはまるものを選び、その番号をマークせよ。

行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  の階数は、

$\text{rank} A =$

である。従って、この行列  $A$  は .

の選択肢：

① 正則である

② 正則ではない

2 行目に 1 行目  $\times 4$ , 3 行目に 1 行目  $\times 5$  を加えて

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

2 行目を  $\times \frac{5}{2}$  して、3 行目から引くと

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

よって、 $\text{rank} A = 3$  となる。

$A$  は 3 次の正方行列で、 $\text{rank} A = 3$  と行列の次数が一致するので、正則である。

【答】  3,  ①

## 問題 003 (バリエーション No.1)

行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & a \\ -3 & a & -4 \end{pmatrix}$  の階数が 2 であるとき

$a =$   または

である。但し、 と  の解答の順序は問わない。

2 行目・3 行目に 1 行目  $\times 3$  を加えて

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & a-6 \\ 0 & a-9 & -10 \end{pmatrix}$$

1 行目の定数倍の行は無く,  $\text{rank } A = 2$  なので, 2 行目の 定数倍が 3 行目に等しくなるので,

$$-7 : a - 9 = a - 6 : -10$$

となり, 計算すると,

$$(a - 6)(a - 9) = 70$$

$$a^2 - 15a - 16 = 0$$

$$(a + 1)(a - 16) = 0$$

$$\therefore a = -1, 16$$

【答】  $-1, 16$

**問題 004 (バリエーション No.1)**

行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & a \\ -1 & -a & 3 \end{pmatrix}$  の階数が 2 であるとき

$$a = \boxed{\text{ア}}$$

である.

3 行目に 1 行目を加えて

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & a \\ 0 & -a + 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1 行目の定数倍の行は無く,  $\text{rank } A = 2$  なので, 2 行目の 定数倍が 3 行目に等しくなるので,

$$4 : -a + 4 = a : 1$$

となり, 計算すると,

$$(-a + 4)a = 4$$

$$-a^2 + 4a - 4 = 0$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0$$

$$(a - 2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

【答】 2