

[コース ID : 45] 線形代数 II

45.4 逆行列

45.4.1 逆行列

問題 001 (バリエーション No.1)

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列は

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウエ}} \\ \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{カ}} \end{pmatrix}$$

である。

逆行列の公式にあてはめて、

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{3 \times (-1) - 2 \times (-2)} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

【答】 $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

問題 002 (バリエーション No.1)

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ について

$$AX = B, \quad YA = B$$

を満たす行列 X , Y は、それぞれ

$$X = \begin{pmatrix} \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウエ}} \\ \boxed{\text{オカ}} & \boxed{\text{キク}} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ケコ}} & \boxed{\text{サ}} \\ \boxed{\text{シ}} & \boxed{\text{ス}} \end{pmatrix}$$

である。

単位行列を E として、 $AX = B$ の両辺左から A^{-1} を掛けて、

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$EX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

よって,

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{1}{1 \times (-3) - (-1) \times 2} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 \times 0 + (-1) \times 3 & 3 \times (-3) + (-1) \times (-3) \\ 2 \times 0 + (-1) \times 3 & 2 \times (-3) + (-1) \times (-3) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

同様に, $YA = B$ の両辺右から A^{-1} を掛けて,

$$\begin{aligned}
 YAA^{-1} &= BA^{-1} \\
 YE &= BA^{-1} \\
 Y &= BA^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \times 3 + (-3) \times 2 & 0 \times (-1) + (-3) \times (-1) \\ 3 \times 3 + (-3) \times 2 & 3 \times (-1) + (-3) \times (-1) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

【答】 $X = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

問題 003 (バリエーション No.1)

$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ について

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウエ}} \\ \boxed{\text{オカ}} & \boxed{\text{キク}} \end{pmatrix}$$

である.

まず AB を計算すると,

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (-2) \times (-2) + 3 \times (-1) & (-2) \times 5 + 3 \times 3 \\ 5 \times (-2) + (-8) \times (-1) & 5 \times 5 + (-8) \times 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

これより、逆行列は

$$\begin{aligned}(AB)^{-1} &= \frac{1}{1 \times 1 - (-1) \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

【答】 $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

問題 004 (バリエーション No.1)

$A = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ について

$$AXB = \begin{pmatrix} 31 & -29 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

を満たす行列 X は

$$X = \begin{pmatrix} \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウエ}} \\ \boxed{\text{オカ}} & \boxed{\text{キ}} \end{pmatrix}$$

である.

AXB に左から A^{-1} を右から B^{-1} を掛けると、単位行列を E として、

$$\begin{aligned}A^{-1}AXB B^{-1} &= EXE \\ &= X\end{aligned}$$

A^{-1} を求めると

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \frac{1}{(-3) \times 2 - (-7) \times 1} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

B^{-1} を求めると

$$\begin{aligned}B^{-1} &= \frac{1}{(-1) \times 5 - 2 \times (-3)} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

AXB に求めた A^{-1} , B^{-1} をそれぞれ左, 右から掛けて、

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 & -29 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 31 + 7 \times (-7) & 2 \times (-29) + 7 \times 5 \\ (-1) \times 31 + (-3) \times (-7) & (-1) \times (-29) + (-3) \times 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & -23 \\ -10 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 \times 5 + (-23) \times 3 & 13 \times (-2) + (-23) \times (-1) \\ (-10) \times 5 + 14 \times 3 & (-10) \times (-2) + 14 \times (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

【答】 $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$