

【コース ID : 45】 線形代数 II

45.2 行列の積

45.2.1 行列の積

問題 001 (バリエーション No.1)

次の計算をせよ.

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウ}} \\ \boxed{\text{エオ}} & \boxed{\text{カキ}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4) \times (-4) + (-2) \times 0 & (-4) \times (-2) + (-2) \times 2 \\ 2 \times (-4) + (-2) \times 0 & 2 \times (-2) + (-2) \times 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$$

【答】 $\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$

問題 002 (バリエーション No.1)

次の計算をせよ (空欄で指定した成分のみ答えること).

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & \boxed{\text{アイウ}} \\ * & \boxed{\text{エオ}} & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

問われているのは、1 行 3 列、2 行 2 列の成分のみなので、これらの成分だけ計算する.

【1 行 3 列】 左の行列 1 行目の成分と右の行列 3 列目の成分を掛け合わせて、加えていく.

$$4 \times (-2) + (-3) \times 5 + 1 \times 0 = -8 - 15 \\ = -23$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & \boxed{-2} \\ 2 & -3 & 5 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1 行目 3 列目

【2 行 2 列】 左の行列 2 行目の成分と右の行列 2 列目の成分を掛け合わせて、加えていく.

$$(-1) \times 3 + 2 \times (-3) + (-1) \times (-1) \\ = -3 - 6 + 1 \\ = -8$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & -1 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \boxed{3} & -2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 行目 2 列目

問題 003 (バリエーション No.1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ のとき,}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} * & \boxed{\text{ア}} \\ \boxed{\text{イ}} & * \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} & * \\ * & \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$$

である（空欄で指定した成分のみ答えること）.

A^3 の成分 $\boxed{\text{ウ}}$ ・ $\boxed{\text{エ}}$ を求めるには A^2 の 4 つの成分が必要なので, A^2 を計算する.

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 1 \\ 1 \times 1 + 1 \times 1 & 1 \times 2 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A^3 の 1 行 1 列成分は,

$$3 \times 1 + 4 \times 1 = 7$$

2 行 2 列成分は,

$$2 \times 2 + 3 \times 1 = 7$$

【答】 $\boxed{\text{ア}}$ 4 $\boxed{\text{イ}}$ 2 $\boxed{\text{ウ}}$ 7 $\boxed{\text{エ}}$ 7

問題 004 (バリエーション No.1)

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ において, } A^2 = O \text{ であるならば, } a = \boxed{\text{アイ}} \text{ である.}$$

実際に A^2 を計算すると

$$\begin{aligned} A^2 &= O \\ \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a^2 - 1 & -a - 1 \\ a + 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって,

$$a^2 - 1 = 0 \quad \dots \text{ ①}$$

$$-a - 1 = 0 \quad \dots \text{ ②}$$

$$a + 1 = 0 \quad \dots \text{ ③}$$

① ～ ③ を同時に満たすのは $a = -1$

【答】 $a = -1$