［コース ID：44］　線形代数 I

44.13　空間ベクトル（線形独立・線形従属）

44.13.1　空間ベクトル（線形独立・線形従属）

問題 001（バリエーション No.1）

四面体 OABC に平面 α が辺 OA，AB，BC，OC とそれぞれ P，Q，R，S で交わっており，$\mathrm{OP}:\mathrm{PA}=\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=\mathrm{BR}:\mathrm{RC}=1:2$ であるとする．

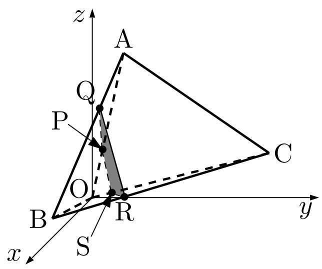
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\vec{c}$ とおくとき

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\vec{b}+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=s\vec{c}-\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\vec{a}$$

であり，$s=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ となる．



P は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を $1:2$ に内分する点なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{1+2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=\frac{1}{3}\vec{a}\qquad\cdots\cdots\cdots ①$$

Q は，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $1:2$ に内分する点なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+2}$$
$$=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}$$
$$=\mathbf{\frac{1}{3}}\vec{a}+\mathbf{\frac{1}{3}}\vec{b}\qquad\cdots\cdots\cdots ②$$

R は，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $1:2$ に内分する点なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{1+2}$$
$$= \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$= \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a}$$
$$= \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{3}}\vec{a} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\vec{b} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{c} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

S は，OC 上の点なので，$\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ は，次のように表せる．① を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$= s\vec{c} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{a} \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

S は，PQR 平面上の点でもあるので，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$，定数 t，r を使って $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ は，次のように表せる．②，③ を代入して，

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = t\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + r\overrightarrow{\mathrm{PR}}$$
$$= t\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) + r\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right)$$
$$= \frac{1}{3}(t-r)\vec{a} + \frac{1}{3}(t+2r)\vec{b} + \frac{1}{3}r\vec{c} \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は一次独立だから，④ と ⑤ を比較して，

$$\begin{cases} t - r = -1 & \cdots\cdots\cdots(1) \\ t + 2r = 0 & \cdots\cdots\cdots(2) \\ \dfrac{1}{3}r = s & \cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

$(2) - (1)$ から

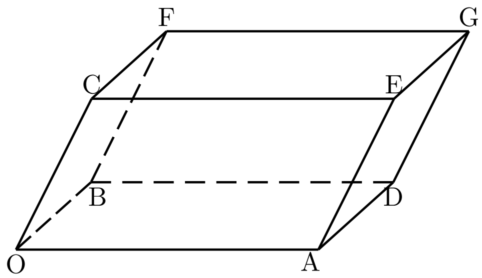
$$3r = 1$$
$$r = \frac{1}{3} \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

(4) を (3) に代入して

$$s = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \quad = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$$

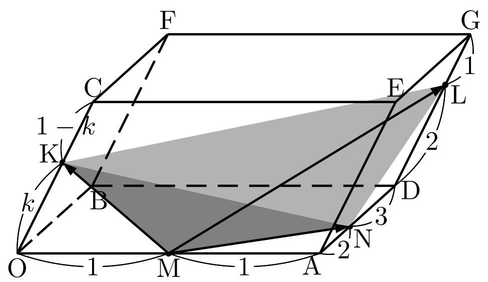
問題 002（バリエーション No.1）

平行六面体 OADB − CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を 2 : 3 に内分する点を N，辺 DG を 2 : 1 に内分する点を L とする．また，辺 OC を $k : 1-k$ $(0<k<1)$ に内分する点を K とする．



このとき、点 L が 3 点 M, N, K の定める平面上にあるならば，$k = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ をそれぞれ求めると，



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{ON}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} \\
&= \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2+3} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})}{5} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{MK}} &= \overrightarrow{\mathrm{OK}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} \\
&= \frac{k\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{k+(1-k)} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= -\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}
\end{aligned}
$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$ は，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{ML}} &= \overrightarrow{\mathrm{OL}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} \\
&= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{2+1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= \frac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) + 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})}{3} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \qquad \cdots ①
\end{aligned}
$$

L は平面 KMN 上の点なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{ML}} &= s\overrightarrow{\mathrm{MN}} + t\overrightarrow{\mathrm{MK}} \\ &= s(\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{2}{5}\overrightarrow{b}) + t(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{c}) \\ &= \frac{1}{2}(s-t)\overrightarrow{a} + \frac{2}{5}s\overrightarrow{b} + tk\overrightarrow{c} \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ は線形独立なので，①，② を比較して，

$$\begin{cases} s-t=1 & \cdots\ (1) \\ \frac{2}{5}s=1 & \cdots\ (2) \\ tk=\frac{2}{3} & \cdots\ (3) \end{cases}$$

(2) より，$s=\frac{5}{2}$ なので，(1) に代入して，

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}-t&=1 \\ t&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(3) に代入，

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}k &= \frac{2}{3} \\ k &= \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} \\ &= \mathbf{\frac{4}{9}}\end{aligned}$$

問題 003（バリエーション No.1）

四面体 OABC において，辺 OA, OB, OC 上にそれぞれ点 D, E, F をとり，$\mathrm{OD}:\mathrm{DA}=1:1$, $\mathrm{OE}:\mathrm{EB}=1:2$, $\mathrm{OF}:\mathrm{FC}=2:1$ となるようにする．△DEF の重心を G，直線 OG と平面 ABC との交点を P とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，

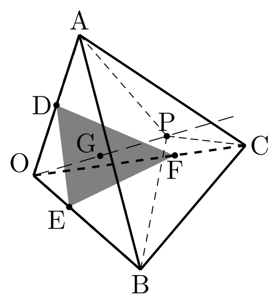
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{b}+\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{a}+\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{b}+\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\vec{c}\text{ であり，}$$

△PBC, △PCA, △PAB の面積の比を最も簡単な整数比で表すと

$\boxed{ス}:\boxed{セ}:\boxed{ソ}$ となる．

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと，



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\frac{1}{2}\vec{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=\frac{1}{1+2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}}&=\frac{2}{2+1}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\frac{2}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}})\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)\\&=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\vec{a}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\vec{b}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}\vec{c}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は，平面 ABC 上の点なので，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と定数 s，t を用いて表せば，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})\\&=(-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表現すれば，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= \vec{a} + (-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \\ &= (-s-t+1)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，直線 OG 上の点だから，定数 k を用いて，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= k\overrightarrow{\mathrm{OG}} \\ &= k\left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{6}k\vec{a} + \frac{1}{9}k\vec{b} + \frac{2}{9}k\vec{c} \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は線形独立なので，①，② を比較して，

$$\begin{cases} -s-t+1 = \dfrac{1}{6}k & \cdots (1) \\ s = \dfrac{1}{9}k & \cdots (2) \\ t = \dfrac{2}{9}k & \cdots (3) \end{cases}$$

(2)，(3) を (1) に代入して，

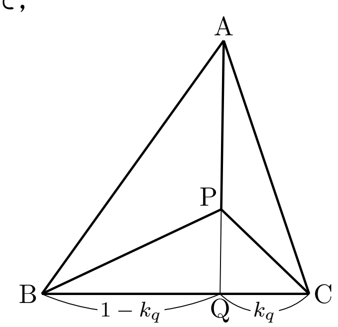
$$\begin{aligned}-\frac{1}{9}k - \frac{2}{9}k + 1 &= \frac{1}{6}k \\ -\frac{1}{2}k &= -1 \\ k &= 2\end{aligned}$$

② に代入，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{1}{6}\times 2\vec{a} + \frac{1}{9}\times 2\vec{b} + \frac{2}{9}\times 2\vec{c} \\ &= \mathbf{\frac{1}{3}}\vec{a} + \mathbf{\frac{2}{9}}\vec{b} + \mathbf{\frac{4}{9}}\vec{c}\end{aligned}$$

$\triangle$ABC において，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の延長線が BC と交わる点を Q として，
$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ は，定数を s_q として，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= s_q\overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= s_q(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\ &= s_q\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c} - \vec{a}\right) \\ &= -\frac{2}{3}s_q\vec{a} + \frac{2}{9}s_q\vec{b} + \frac{4}{9}s_q\vec{c} \qquad \cdots ③\end{aligned}$$



また，k_q を $(0 < k_q < 1)$ の定数として，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= k_q\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-k_q)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= k_q(\vec{b} - \vec{a}) + (1-k_q)(\vec{c} - \vec{a}) \\ &= -\vec{a} + k_q\vec{b} + (1-k_q)\vec{c} \qquad \cdots ④\end{aligned}$$

$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ は，線形独立なので，③，④ を比較して，

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{3}s_q = -1 \\ \dfrac{2}{9}s_q = k_q \\ \dfrac{4}{9}s_q = 1 - k_q \end{cases}$$

これらより，$s_q = \dfrac{3}{2}$，$k_q = \dfrac{1}{3}$ なので，

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{PQ} = 3 : 1 \qquad \cdots ⑤$$
$$\mathrm{BQ} : \mathrm{QC} = 2 : 1 \qquad \cdots ⑥$$

よって，

⑤より
$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{PBC} &= 3 : 1 \\ \triangle\mathrm{ABC} - \triangle\mathrm{PBC} : \triangle\mathrm{PBC} &= 3 - 1 : 1 \\ \therefore \quad \triangle\mathrm{PAB} + \triangle\mathrm{PCA} : \triangle\mathrm{PBC} &= 2 : 1 \qquad \cdots ⑦ \end{aligned}$$

⑥より
$$\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{PCA} = 2 : 1 \qquad \cdots ⑧$$

⑦ を変形して，⑧ を用いると，

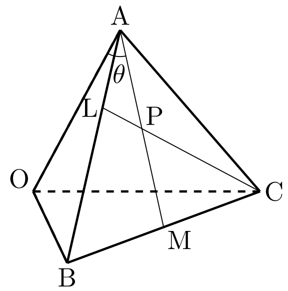
$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{PBC} &= \frac{1}{2}(\triangle\mathrm{PAB} + \triangle\mathrm{PCA}) \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times \triangle\mathrm{PCA} \\ &= \frac{3}{2}\triangle\mathrm{PCA} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{PBC} : \triangle\mathrm{PCA} : \triangle\mathrm{PAB} &= \frac{3}{2} : 1 : 2 \\ &= \mathbf{3} : \mathbf{2} : \mathbf{4} \end{aligned}$$

問題 004（バリエーション No.1）

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする．辺 AB を $1:2$ に内分する点を L，線分 BC の中点を M とする．さらに，線分 AM と線分 CL の交点を P とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\overrightarrow{\mathrm{CL}}$ であり，線分 OP の長さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{オカ}}}{\boxed{キ}}$ である．



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は，定数 k $(0 < k < 1)$ を用いて表すと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= k\overrightarrow{\mathrm{AM}} = k(\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})\\ &= k\left(\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \vec{a}\right)\\ &= -k\vec{a} + \frac{1}{2}k\vec{b} + \frac{1}{2}k\vec{c} \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

また，P は CL 上の点 でもあるので，定数 l $(0 < l < 1)$ を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= l\overrightarrow{\mathrm{AL}} + (1-l)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &= l(\overrightarrow{\mathrm{OL}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + (1-l)(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})\\ &= l\left(\frac{2\vec{a} + \vec{b}}{1+2} - \vec{a}\right) + (1-l)(\vec{c} - \vec{a})\\ &= l\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) + (l-1)\vec{a} + (1-l)\vec{c}\\ &= \left(\frac{2}{3}l - 1\right)\vec{a} + \frac{1}{3}l\vec{b} + (1-l)\vec{c} \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は，線形独立なので，①，② を比較して，

$$\begin{cases} -k = \dfrac{2}{3}l - 1 & \cdots (1)\\ \dfrac{1}{2}k = \dfrac{1}{3}l & \cdots (2)\\ \dfrac{1}{2}k = 1 - l & \cdots (3)\end{cases}$$

(2)，(3) より，

$$\frac{1}{3}l = 1 - l$$

$$\therefore \quad l = \frac{3}{4}$$

(3) に代入，

$$\frac{1}{2}k = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad k = \frac{1}{2}$$

これらは (1) を満たす．よって $k=\dfrac{1}{2}$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=k\overrightarrow{\mathrm{AM}}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\overrightarrow{\mathrm{AM}}\end{aligned}$$

また，$l=\dfrac{3}{4}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AL}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となり，P は LC を $1:3$ に内分する点なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}\overrightarrow{\mathrm{CL}}$$

さらに，$\angle\mathrm{OAM}=\theta$ として，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2}{2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OM}}|}\\&=\frac{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta\\&=1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2-2\times1\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\\&=\frac{11}{16}\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{4}}$$