［コース ID：44］　線形代数 I

44.4　平面ベクトル（平行・垂直・内分点）

44.4.1　平面ベクトル（平行・垂直・内分点）

問題 001（バリエーション No.1）

２つのベクトル $\overrightarrow{a} = (6,\ \ -3)$，　$\overrightarrow{b} = (-8k+4,\ \ 2k-10)$ が平行であるとき
$k =$ $\boxed{\text{アイ}}$ である．

$\overrightarrow{a} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{b}$ のとき，l (: 実数) として，$\overrightarrow{b} = l\overrightarrow{a}$ と表せるので，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{b} &= l\overrightarrow{a} \\ (-8k+4\ ,\ 2k-10) &= l(6\ ,\ -3) \\ (-8k+4\ ,\ 2k-10) &= (6l\ ,\ -3l) \end{aligned}$$

x 成分，y 成分を比較して，

$$\begin{cases} -8k+4 = 6l & \cdots ① \\ 2k-10 = -3l & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② × 2 として，l を消去すれば，

$$\begin{aligned} -8k+4+4k-20 &= 6l-6l \\ -4k-16 &= 0 \\ \boldsymbol{k} &\boldsymbol{= -4} \end{aligned}$$

このとき ② より l を求めると

$$\begin{aligned} 2\times(-4)-10 &= -3l \\ -8-10 &= -3l \\ l &= 6 \end{aligned}$$

これは ① も満たす

問題 002（バリエーション No.1）

$\mathrm{A}(4,\ \ -6)$，$\mathrm{B}(-10,\ \ 7)$，$\mathrm{C}(-2,\ \ k)$，$\mathrm{D}(k,\ \ 1)$ について

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ であるならば、$k =$ $\boxed{\text{アイ}}$ である．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のとき，l (: 実数) として，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = l\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表せるので，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{CD}} &= l\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ (k-(-2)\ ,\ 1-k) &= l(-10-4\ ,\ 7-(-6)) \\ (k+2\ ,\ 1-k) &= (-14l\ ,\ 13l) \end{aligned}$$

x 成分，y 成分を比較して，

$$\begin{cases} k+2=-14l & \cdots ① \\ 1-k=13l & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② とすれば，

$$\begin{aligned} (k+2)+(1-k) &= -14l+13l \\ 3 &= -l \\ l &= -3 \end{aligned}$$

このとき ① より k を求めると

$$\begin{aligned} k+2 &= -14\times(-3) \\ k+2 &= 42 \\ \boldsymbol{k} &\boldsymbol{= 40} \end{aligned}$$

これらの k , l は ② も満たす.

問題 003（バリエーション No.1）

$|\overrightarrow{x}|=4$, $|\overrightarrow{y}|=2$, $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}=-4$ であるとき，2つのベクトル

$$\overrightarrow{p}=7k\overrightarrow{x}+4\overrightarrow{y},\quad \overrightarrow{q}=-2\overrightarrow{x}-9\overrightarrow{y}$$

が垂直であるならば、$k=$ $\boxed{\text{ア}}$ である.

$\overrightarrow{p}\perp\overrightarrow{q}$ のとき，$\boldsymbol{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}}$ $\left(=|\overrightarrow{p}||\overrightarrow{q}|\cos\dfrac{\pi}{2}=|\overrightarrow{p}||\overrightarrow{q}|\times 0\right)$ $\boldsymbol{=0}$ なので，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q} = (7k\overrightarrow{x}+4\overrightarrow{y})\cdot(-2\overrightarrow{x}-9\overrightarrow{y}) &= 0 \\ -14k|\overrightarrow{x}|^2-63k\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}-8\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}-36|\overrightarrow{y}|^2 &= 0 \\ -14k|\overrightarrow{x}|^2-(63k+8)\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}-36|\overrightarrow{y}|^2 &= 0 \\ 14k|\overrightarrow{x}|^2+(63k+8)\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}+36|\overrightarrow{y}|^2 &= 0 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{x}|=4$, $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}=-4$, $|\overrightarrow{y}|=2$ を代入すれば，

$$\begin{aligned} 14k\times 4^2+(63k+8)\times(-4)+36\times 2^2 &= 0 \\ 14k\times 4+(63k+8)\times(-1)+36 &= 0 \\ 56k-63k-8+36 &= 0 \\ -7k &= -28 \\ \boldsymbol{k} &\boldsymbol{= 4} \end{aligned}$$

問題 004（バリエーション No.1）

△ABC において、$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とし，辺 AB を $1:2$ に内分する点を D，辺 BC を $4:1$ に外分する点を F とする．

AC と DF の交点を E とし，$AE : EC = k : 1-k$ とするとき，

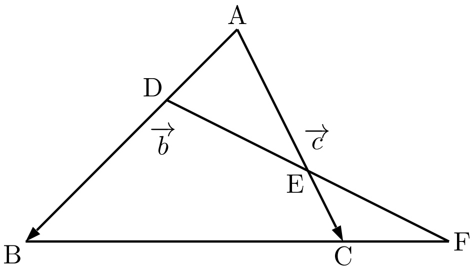
$$\overrightarrow{DE} = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}\vec{b} + k\vec{c},$$

$$\overrightarrow{DF} = \frac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}\vec{b} + \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{c} \text{ である．}$$

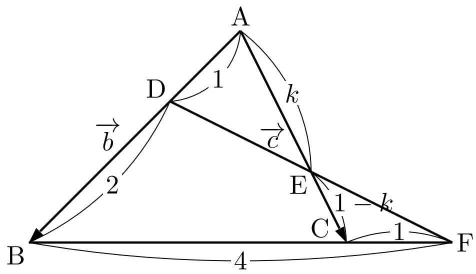
３点 D, E, F は一直線上にあることから，$k = \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ であることがわかり，

このとき、$\overrightarrow{DF} = \boxed{サ}\ \overrightarrow{DE}$ となるので，

DE : EF を最も簡単な整数の比で表すと $\boxed{シ} : \boxed{ス}$ となる．



$\overrightarrow{DE}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表すと，



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}\\
&= \frac{k}{k+(1-k)}\vec{c} - \frac{1}{1+2}\vec{b}\\
&= k\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b}\\
&= \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{3}}\vec{b} + k\vec{c}
\end{aligned}$$

同様に $\overrightarrow{DF}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表すと，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}\\
&= \frac{2}{1+2}\vec{b} + \frac{4}{4-1}\overrightarrow{BC}\\
&= \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{4}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\\
&= \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{4}{3}(\vec{c} - \vec{b})\\
&= \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{4}{3}\vec{c} - \frac{4}{3}\vec{b}\\
&= \frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{3}}\vec{b} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\vec{c}
\end{aligned}$$

D , E , F が一直線上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{DE}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{DF}}$ となる．l を実数として $\overrightarrow{\mathrm{DF}} = l\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ とできるので，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{DF}} &= l\overrightarrow{\mathrm{DE}} \\
-\frac{2}{3}\overrightarrow{b} + \frac{4}{3}\overrightarrow{c} &= l\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{b} + k\overrightarrow{c}\right) \\
-\frac{2}{3}\overrightarrow{b} + \frac{4}{3}\overrightarrow{c} &= -\frac{l}{3}\overrightarrow{b} + kl\overrightarrow{c} \\
-2\overrightarrow{b} + 4\overrightarrow{c} &= -l\overrightarrow{b} + 3kl\overrightarrow{c}
\end{aligned}$$

$$(l-2)\overrightarrow{b} + (-3kl+4)\overrightarrow{c} = 0$$

よって，

$$\begin{cases} l - 2 = 0 & \cdots ① \\ -3kl + 4 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より $l = 2$ (よって $\overrightarrow{\mathrm{DF}} \boldsymbol{=} \mathbf{2}\,\overrightarrow{\mathrm{DE}}$) なので，② より，

$$\begin{aligned}
-3k \times 2 + 4 &= 0 \\
-6k + 4 &= 0 \\
k &= \mathbf{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = 2\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ より，$\mathrm{DE} : \mathrm{DF} = 1 : 2$ なので，

$$\begin{aligned}
\mathrm{DE} : \mathrm{EF} &= \mathrm{DE} : (\mathrm{DF} - \mathrm{DE}) \\
&= 1 : (2-1) \\
&= \mathbf{1 : 1}
\end{aligned}$$