［コース ID：44］　線形代数 I

44.5　平面ベクトル（直線のベクトル）

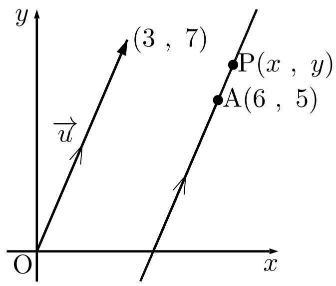
44.5.1　平面ベクトル（直線のベクトル）

問題 001（バリエーション No.1）

点 A(6,　5) を通り、$\overrightarrow{u}=(3,\ \ 7)$ に平行な直線の方程式を、媒介変数 t を用いて表すと，

$$\begin{cases} x = 6 + \boxed{\text{ア}}\ t \\ y = \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}}\ t \end{cases}$$

となる．



直線上の点を P(x , y) とすると媒介変数 t を用いて，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{u} \\ (x\ ,\ y) &= (6\ ,\ 5)\ +\ t(3\ ,\ 7) \\ &= (6+3t\ ,\ 5+7t) \end{aligned}$$

よって

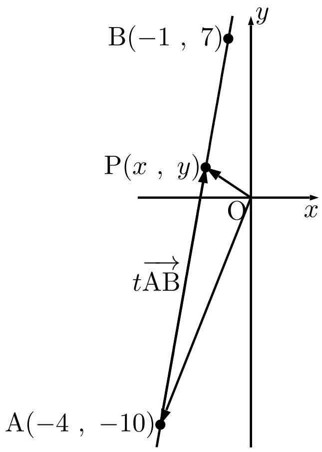
$$\begin{cases} x = 6 + \mathbf{3}t \\ y = \mathbf{5} + \mathbf{7}t \end{cases}$$

問題 002（バリエーション No.1）

２点 A(−4,　−10), B(−1,　7) を通る直線の方程式を、媒介変数 t を用いて表すと

$$\begin{cases} x = -4 + \boxed{\text{ア}}\ t \\ y = \boxed{\text{イウエ}} + \boxed{\text{オカ}}\ t \end{cases}$$

となる．



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分表示すると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (-1\ ,\ 7) - (-4, -10) \\ &= (-1-(-4)\ ,\ 7-(-10)) \\ &= (3\ ,\ 17) \end{aligned}$$

なので，
直線上の点を P(x , y) とし，媒介変数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$(x\ ,\ y) = (-4\ ,\ -10)\ +\ t(3\ ,\ 17)$$
$$= (-4+3t\ ,\ -10+17t)$$

よって

$$\begin{cases} x = -4 + \mathbf{3}t \\ y = \mathbf{-10} + \mathbf{17}t \end{cases}$$

問題 003（バリエーション No.1）

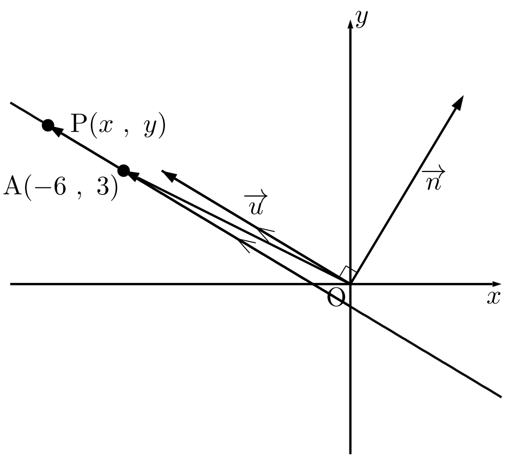
点 $\mathrm{A}(-6,\ 3)$ を通り、$\overrightarrow{n} = (3,\ 5)$ に垂直な直線の方程式は

$$\boxed{\ \text{ア}\ }\,x + \boxed{\ \text{イ}\ }\,y + 3 = 0$$

である。

$\overrightarrow{n} = (3\ ,\ 5)$ に垂直なベクトルは，$\overrightarrow{n}$ との内積が 0 になる．

このため，$\overrightarrow{n}$の x 成分と y 成分を入れ替えて，どちらかにマイナスを付ければ，n ベクトルとの内積が 0 になるベクトル，例えば，$\overrightarrow{u} = (-5\ ,\ 3)$ が得られる．



$\overrightarrow{u}$ を用いて，直線上の点 $\mathrm{P}(x\ ,\ y)$ を媒介変数で表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{u}$$
$$(x\ ,\ y) = (-6\ ,\ 3) + t(-5\ ,\ 3)$$
$$= (-6-5t\ ,\ 3+3t)$$

これより，

$$\begin{cases} x = -6 - 5t & \cdots ① \\ y = 3 + 3t & \cdots ② \end{cases}$$

① × 3 及び ② × 5 をして，各々加えると

$$3x + 5y = 3 \times (-6-5t) + 5 \times (3+3t)$$
$$3x + 5y = -18 - 15t + 15 + 15t$$
$$3x + 5y = -3$$

$$\mathbf{3x + 5y + 3 = 0}$$

問題 003（バリエーション No.13）

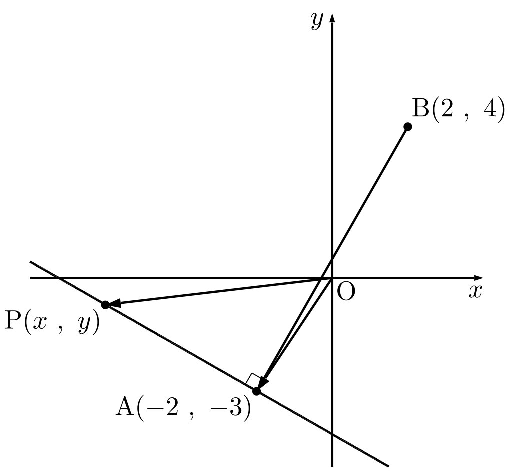
２点 A$(-2,\ -3)$, B$(2,\ 4)$ を通る直線と直交し、A を通る直線の方程式は

$$\boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{イ}}\,y + 29 = 0$$

である。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (2\ ,\ 4) - (-2\ ,\ -3)\\ &= (2-(-2)\ ,\ 4-(-3))\\ &= (4\ ,\ 7)\end{aligned}$$



$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4\ ,\ 7)$ に垂直なベクトルは，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ との内積が 0 になるので，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の x 成分と y 成分を入れ替えて，どちらかにマイナスを付けて，例えば，$(-7\ ,\ 4)$ が得られる．

これを方向ベクトルとして，直線上の点 P$(x\ ,\ y)$ を媒介変数 t で表すと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ (x\ ,\ y) &= (-2\ ,\ -3) + t(-7\ ,\ 4)\\ &= (-2-7t\ ,\ -3+4t)\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{cases} x = -2-7t & \cdots ① \\ y = -3+4t & \cdots ② \end{cases}$$

① × 4 及び ② × 7 をして，各々加えると

$$\begin{aligned}4x+7y &= 4\times(-2-7t) + 7\times(-3+4t)\\ 4x+7y &= -8-28t-21+28t\\ 4x+7y &= -29\end{aligned}$$

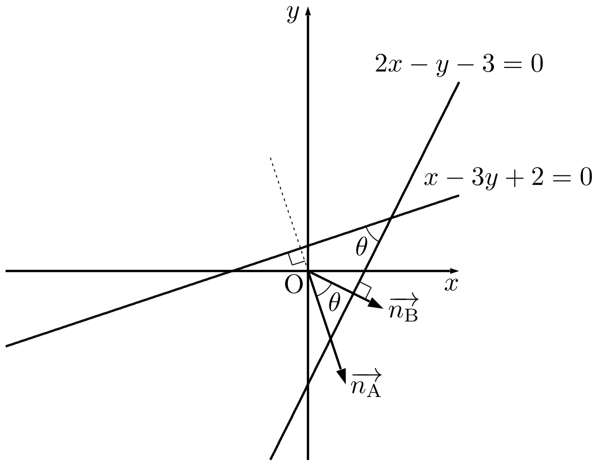
$$\boldsymbol{4x+7y+29=0}$$

問題 004（バリエーション No.1）

２つの直線 $x-3y+2=0,\ \ 2x-y-3=0$ のなす角を θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

二直線のなす角 θ を直接考えないで，各直線の法線ベクトルのなす角を考えれば良いので，



$x-3y+2=0$ の法線ベクトル $\overrightarrow{n_{\mathrm{A}}}$ として，一般形の直線の方程式の x の係数が法線ベクトルの x 成分，y の係数が法線ベクトルの y 成分なので

$$\overrightarrow{n_{\mathrm{A}}} = (1\ ,\ -3)$$

$2x-y-3=0$ の法線ベクトル $\overrightarrow{n_{\mathrm{B}}}$ として，

$$\overrightarrow{n_{\mathrm{B}}} = (2\ ,\ -1)$$

内積を 左辺は成分で，右辺は各法線ベクトルの大きさ・なす角から計算すると，

$$\overrightarrow{n_{\mathrm{A}}} \cdot \overrightarrow{n_{\mathrm{B}}} = |\overrightarrow{n_{\mathrm{A}}}||\overrightarrow{n_{\mathrm{B}}}|\cos\theta$$

$$1 \times 2 + (-3) \times (-1) = \sqrt{1^2+(-3)^2} \times \sqrt{2^2+(-1)^2} \times \cos\theta$$

$$5 = \sqrt{10} \times \sqrt{5} \times \cos\theta$$

$$5 = 5\sqrt{2}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これより，

$$\cos\theta = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$