# ［コース ID：44］　線形代数 I

## 44.7　空間座標

### 44.7.1　空間座標

**問題 001（バリエーション No.1）**

点 $\mathrm{P}(1,\ 2,\ 3)$ について、点 P から $xy$ 平面に引いた垂線と、$xy$ 平面との交点 Q の座標は

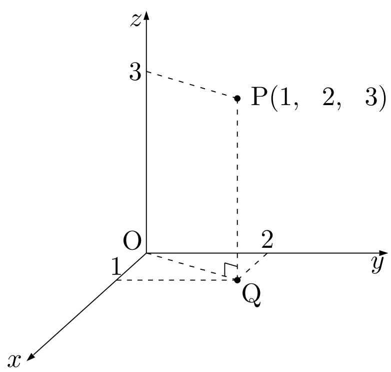
$$\mathrm{Q}\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$$

である.

点 P から $xy$ 平面に引いた垂線と $xy$ 平面との交点は点 P を $z=0$ の平面に投影したものであるから，P，Q は右図のような位置関係となり，Q の座標は，P の $x$，$y$ 成分そのままで，$z$ 成分を $3 \to 0$ としたものに他ならない．よって，

$$\mathrm{Q}\ (\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{0})$$

となる.




同様に，点 P から $yz$ 平面に引いた垂線と $yz$ 平面との交点は 点 P を $x=0$ の平面に投影したものであるから，$(0,\ 2,\ 3)$ となる.

また，点 P から $zx$ 平面に引いた垂線と $zx$ 平面との交点は 点 P を $y=0$ の平面に投影したものであるから，$(1,\ 0,\ 3)$ となる.

**【答】　Q (1，2，0)**

**問題 002（バリエーション No.1）**

点 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ と、$xy$ 平面に関して対称な点の座標を、次のなかから選び、その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ．

⓪ $(-a,\ b,\ c)$

① $(a,\ -b,\ c)$

② $(a,\ b,\ -c)$

③ $(-a,\ -b,\ c)$

④ $(-a,\ b,\ -c)$

⑤ $(a,\ -b,\ -c)$

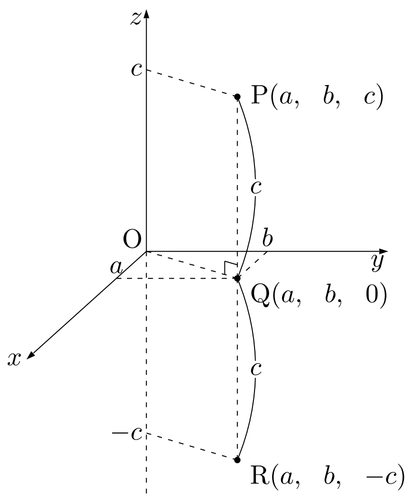
⑥ $(-a,\ -b,\ -c)$

点 P から $xy$ 平面に引いた垂線と $xy$ 平面との交点 Q は 点 P を $z=0$ の平面に投影したものであるから，

$\mathrm{Q}\ (a,\ b,\ 0)$

点 P と $xy$ 平面に関して対称な点の座標を R とすると，$\mathrm{PQ}=\mathrm{RQ}$（右図では $c>0$ として描いているため $=c$）なので，

$\mathrm{R}\ (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{-c})$




結果として，$\boldsymbol{xy}$ **平面**に対称な点の座標は，$\boldsymbol{z}$ **成分の符号をかえれば得られる**．つまり，

(元の点の $x$ 成分，元の点の $y$ 成分，元の点の $z$ 成分の符号をかえたもの)

同様に，点 P と $\boldsymbol{yz}$ **平面**に関して対称な点は，$\boldsymbol{x}$ **成分の符号をかえればよい**ので $(-a,\ b,\ c)$

点 P と $\boldsymbol{zx}$ **平面**に関して対称な点は，$\boldsymbol{y}$ **成分の符号をかえればよい**ので $(a,\ -b,\ c)$

また，点 P と $\boldsymbol{x}$ **軸**に関して対称な点は，$x$ 成分そのままで，$\boldsymbol{y}$ **成分**，$\boldsymbol{z}$ **成分の符号をかえればよく** $(a,\ -b,\ -c)$

点 P と $\boldsymbol{y}$ **軸**に関して対称な点は，$y$ 成分そのままで，$\boldsymbol{x}$ **成分**，$\boldsymbol{z}$ **成分の符号をかえればよく** $(-a,\ b,\ -c)$

点 P と $\boldsymbol{z}$ **軸**に関して対称な点は，$z$ 成分そのままで，$\boldsymbol{x}$ 成分，$\boldsymbol{y}$ **成分の符号をかえればよく** $(-a,\ -b,\ c)$

点 P と **原点** に関して対称な点は，**すべての成分の符号をかえればよく** $(-a,\ -b,\ -c)$ となる．

**【答】**　$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{-c})$

**問題 003（バリエーション No.1）**

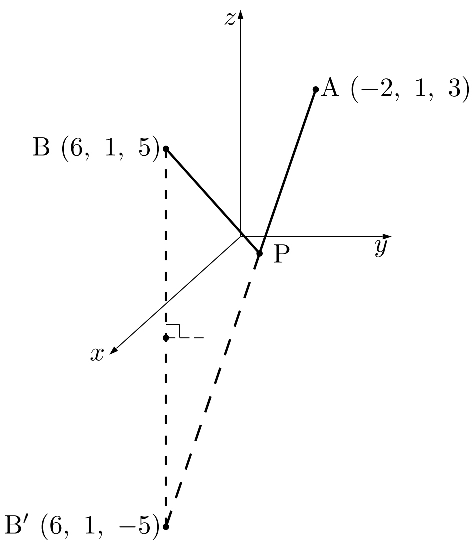
$xyz$ 空間内に 2 点 A$(-2,\ 1,\ 3)$，B$(6,\ 1,\ 5)$ がある．

いま，$xy$ 平面上に点 P をとり，AP + PB が最小になるようにするならば，
P の座標は $\left( \boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}} \right)$ である．

AP+PB を直接求めずに 点 B を $xy$ 平面に関して対称移動した点を B′ とすると，

$$\text{AP+PB} = \text{AP+PB}'$$

であるから，AP+PB′ が最小になるときを考える．




B′ の座標は，

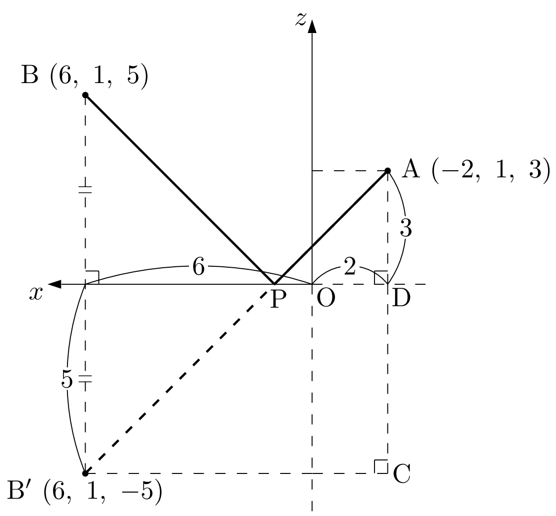
$$\text{B}'\ (6,\ 1,\ -5)$$

である．

点 A，P，B′ が，一直線上にあるとき，AP+PB′ が最小になる．

また，点 A，B，B′ ともに $y$ 座標が 1 であり，$y=1$ の平面上にあることがわかるので，P も，$y=1$ の平面上にある．

そこで，$y=1$ の平面のグラフを描くと下図のようになる．




点 A，B′ の $x$ 座標の差は，

$$6-(-2)=8$$

$z$ 座標の差は，

$$3-(-5)=8$$

なので，左図のように 点 C を決めると △AB’C は，直角二等辺三角形となる．

よって，図のように D 点を決めると △ADP も，直角二等辺三角形となる．

$$\text{AD=DP}$$

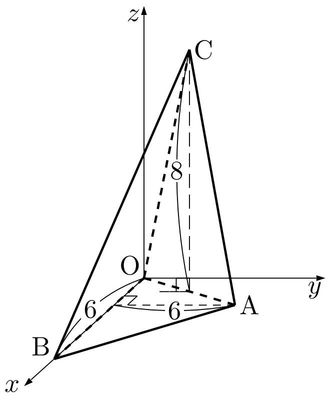
より，OP $=1$ であり，P 点の $x$ 座標は，1 となる．$y=1$ の平面上かつ $xy$ 平面上（$z=0$）だから，点 P の座標は，$\mathbf{(1, 1, 0)}$ となる．

このように，共通の座標成分があるなど，同一平面で考えればよい場合，$xy$ 座標平面の問題と同じように解くことができる．

**【答】　(1，1，0)**

**問題 004（バリエーション No.1）**

原点 O，A(2,　4,　0)，B(6,　0,　0)，C(1,　2,　8) を頂点とする四面体 OABC の体積は $\boxed{\text{アイ}}$ である．




四面体の体積は，$\mathbf{\dfrac{1}{3}}$ × (**底面積**) × (**高さ**) で求められるので，（面積が求めやすい底面）と（高さが求めやすい頂点）を決める．

各点の座標から $x$ 軸，$y$ 軸，$z$ 軸方向の長さは計算できる．

底辺を OB（$x$ 軸方向），その高さを点 A の $y$ 座標（$y$ 軸方向）とする △OAB を**底面**に 点 C の $z$ 座標を **高さ**（$z$ 軸方向）に選ぶ．

四面体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{V} &= \frac{1}{3} \times \left\{ \frac{1}{2} \times \mathrm{OB} \times (\text{点 A の } y \text{ 座標}) \right\} \times (\text{点 C の } z \text{ 座標}) \\ &= \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \right) \times 8 \\ &= 32 \end{aligned}$$

**【答】　32**