［コース ID：44］　線形代数 I

44.8　空間ベクトル

44.8.1　空間ベクトル

問題 001（バリエーション No.1）

$\overrightarrow{a} = (-4,\ \ -2,\ \ 1)$, $\overrightarrow{b} = (1,\ \ 2,\ \ -1)$ のとき，
$2\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$ を成分で表すと $\left(\boxed{\text{アイウ}},\ \ \boxed{\text{エオカ}},\ \ \boxed{\text{キ}}\right)$ となり、その大きさは $\boxed{\text{クケ}}$ である．

成分をあてはめて計算すると，

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b} &= 2(-4,\ \ -2,\ \ 1) - 4(1,\ \ 2,\ \ -1) \\ &= (-8,\ \ -4,\ \ 2) + (-4,\ \ -8,\ \ 4) \\ &= \mathbf{(-12,\ \ -12,\ \ 6)} \end{aligned}$$

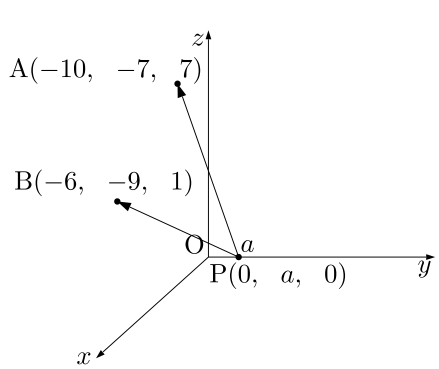
求めた成分から，$\sqrt{(x\ 成分)^2 + (y\ 成分)^2 + (z\ 成分)^2}$ より，大きさを計算すると

$$\begin{aligned} |\,2\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}\,| &= \sqrt{(-12)^2 + (-12)^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{2 \times (2 \times 6)^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{(2 \times 2^2 + 1) \times 6^2} \\ &= \sqrt{3^2 \times 6^2} \\ &= \mathbf{18} \end{aligned}$$

問題 002（バリエーション No.1）

２点 $\mathrm{A}(-10,\ \ -7,\ \ 7)$, $\mathrm{B}(-6,\ \ -9,\ \ 1)$ および y 軸上の点 P について，$\mathrm{AP} = \mathrm{BP}$ が成り立つとき，点 P の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \ \boxed{\text{イウ}},\ \ \boxed{\text{エ}}\right)$ である．

点 P は y 軸上の点なので x，z 座標が 0 になる．点 P の y 座標を a とすると，



$$\mathrm{P}\ (0,\ \ a,\ \ 0)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を各成分より計算すると，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{PA}} &= (-10,\ \ -7,\ \ 7) - (0,\ \ a,\ \ 0) \\ &= (-10, -a-7, 7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{PB}} &= (-6,\ \ -9,\ \ 1) - (0,\ \ a,\ \ 0) \\ &= (-6, -a-9, 1) \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$ なので

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| &= |\overrightarrow{\mathrm{PB}}| \\
\sqrt{(-10)^2+(-a-7)^2+7^2} &= \sqrt{(-6)^2+(-a-9)^2+1^2} \\
100+a^2+14a+49+49 &= 36+a^2+18a+81+1 \\
-4a &= -80 \\
a &= 20
\end{aligned}$$

【答】　(0,　20,　0)

問題 003（バリエーション No.1）

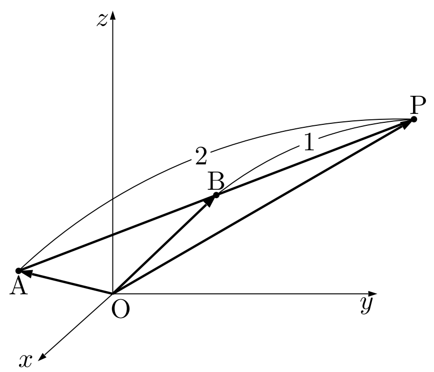
2点 A(4,　−3,　3), B(−5,　3,　3) について、線分 AB を 2 : 1 に外分する点 P の座標は $\left(\boxed{\text{アイウ}},\ \boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)$ である.

各点 A，B の座標から $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求めると，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (-5,\ 3,\ 3)-(4,\ -3,\ 3) \\
&= (-9,\ 6,\ 0)
\end{aligned}$$

P 点は，線分 AB 2 : 1 に外分するので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \frac{2}{2-1}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= 2(-9,\ 6,\ 0) \\
&= (-18,\ 12,\ 0)
\end{aligned}$$



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分が，点 P の座標となるので，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}} \\
&= (4,\ -3,\ 3)+(-18,\ 12,\ 0) \\
&= \mathbf{(-14,\ 9,\ 3)}
\end{aligned}$$

【公式を使って解くと】

外分点の位置ベクトルの公式より，

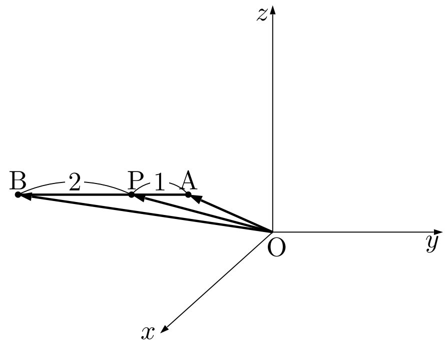
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{(-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2-1} \\
&= -\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
&= -(4,\ -3,\ 3)+2(-5,\ 3,\ 3) \\
&= \mathbf{(-14,\ 9,\ 3)}
\end{aligned}$$

問題 003（バリエーション No.2）

２点 A(3,　0,　2),　B(3,　−3,　2) について、線分 AB を 1 : 2 に内分する点 P の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}},\ \boxed{\text{エ}} \right)$ である．

各点 A，B の座標から $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求めると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (3,\ -3,\ 2) - (3,\ 0,\ 2)\\ &= (0,\ -3,\ 0)\end{aligned}$$



P 点は，線分 AB を 1 : 2 に内分するので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \frac{1}{1+2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \frac{1}{1+2}(0,\ -3,\ 0)\\ &= (0,\ -1,\ 0)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分が，点 P の座標となるので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ &= (3,\ 0,\ 2) + (0,\ -1,\ 0)\\ &= \mathbf{(3,\ -1,\ 2)}\end{aligned}$$

【公式を使って解くと】

内分点の位置ベクトルの公式より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{2\times\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 1\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+2}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \frac{2}{3}(3,\ 0,\ 2) + \frac{1}{3}(3,\ -3,\ 2)\\ &= \mathbf{(3,\ -1,\ 2)}\end{aligned}$$

問題 004（バリエーション No.1）

$\vec{a} = (2,\ 3,\ -4)$,　$\vec{b} = (-1,\ -3,\ 0)$,　$\vec{c} = (-1,\ -4,\ -1)$ のとき，

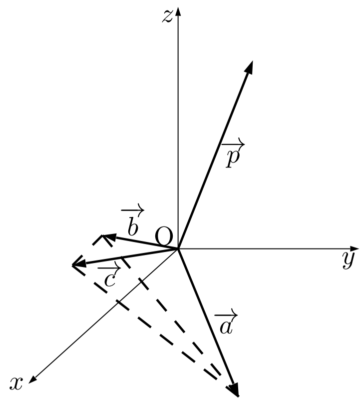
$$\vec{p} = (-5,\ 0,\ 4)$$

を $\vec{p} = l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$ の形で表すと，

$l = \boxed{\text{アイ}}$，$m = \boxed{\text{ウエ}}$，$n = \boxed{\text{オカキ}}$ となる．

３本のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は，ともに 0 ではなく，同一平面上にない (向きがそれぞれ違う) ので，任意のベクトルをこの３つのベクトルを用いて表せる．

各ベクトル成分を $\overrightarrow{p} = l\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b} + n\overrightarrow{c}$ にあてはめて，（以下は、見やすさのため列ベクトル形式で書く）



$$\overrightarrow{p} = l\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b} + n\overrightarrow{c}$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = l\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l - m - n \\ 3l - 3m - 4n \\ -4l - n \end{pmatrix}$$

よって次の連立方程式を解けばよい．

$$\begin{cases} -5 = 2l - m - n & \cdots\cdots ① \\ 0 = 3l - 3m - 4n & \cdots\cdots ② \\ 4 = -4l - n & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

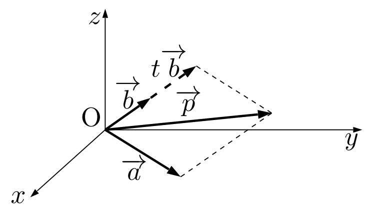
これを解いて

$$\boldsymbol{l = 11,\ \ m = 75,\ \ n = -48}$$

問題 005（バリエーション No.1）

$\overrightarrow{a} = (-2,\ 4,\ -4)$，$\overrightarrow{b} = (2,\ 4,\ 3)$ とし，$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{p}$ の大きさの最小値は $\boxed{\text{ア}}$ で，そのときの t の値は $\boxed{\text{イ}}$ である．

$\overrightarrow{p}$ に $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ の成分をあてはめると，



$$\begin{aligned} \overrightarrow{p} &= (-2,\ 4,\ -4) + t(2,\ 4,\ 3) \\ &= (-2 + 2t,\ 4 + 4t,\ -4 + 3t) \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{p}|^2$ を求めると

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{p}|^2 &= (-2 + 2t)^2 + (4 + 4t)^2 + (-4 + 3t)^2 \\ &= (4t^2 - 8t + 4) + (16t^2 + 32t + 16) + (9t^2 - 24t + 16) \\ &= 29t^2 + 36 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{p}|^2$ は t の 2 次関数と考えれば，そのグラフは，下に凸の曲線であり，$t = 0$ のとき，最小値が 36．
よって，$|\overrightarrow{p}|$ の最小値 $|\overrightarrow{p}|_{min}$ の値は，

$$|\overrightarrow{p}|_{min} = \sqrt{36} = 6$$

【答】　最小値 **6 ($\boldsymbol{t = 0}$ のとき)**