［コース ID：44］　線形代数 I

44.11　空間ベクトル（平面の方程式）

44.11.1　空間ベクトル（平面の方程式）

問題 001（バリエーション No.1）

点 A$(5,\ 3,\ 4)$ を通り、直線 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+5}{3}$ に垂直な平面の方程式は

$$3x+\boxed{\text{ア}}\,y+\boxed{\text{イ}}\,z-\boxed{\text{ウエ}}=0$$

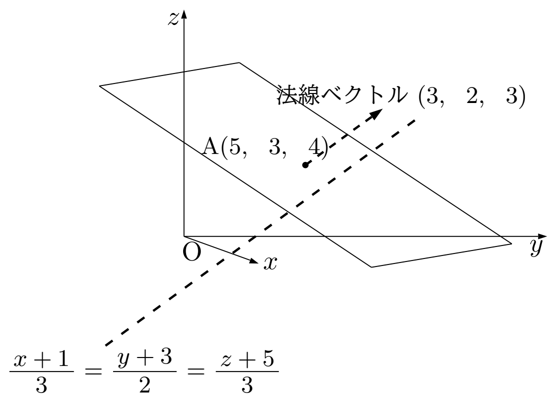
である．

与えられた直線の方向ベクトルは，$(3,\ 2,\ 3)$ なので，これを法線ベクトルにもつ平面の方程式は，

$$3x+2y+3z+d=0$$

とでき，$(5,\ 3,\ 4)$ を代入すると，

$$\begin{aligned}3\times5+2\times3+3\times4+d&=0\\15+6+12+d&=0\\d&=-33\end{aligned}$$



よって，求める平面の方程式は

$$3x+\mathbf{2}y+\mathbf{3}z-\mathbf{33}=0$$

【別の解法】

$(a,\ b,\ c)$ を法線ベクトルとし，一点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通る平面の方程式は，

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

と表せるので，法線ベクトル $(3,\ 2,\ 3)$，一点 A$(5,\ 3,\ 4)$ をあてはめれば，

$$\begin{aligned}3(x-5)+2(y-3)+3(z-4)&=0\\3x-15+2y-6+3z-12&=0\\3x+\mathbf{2}y+\mathbf{3}z-\mathbf{33}&=0\end{aligned}$$

として，同じ解が得られる．

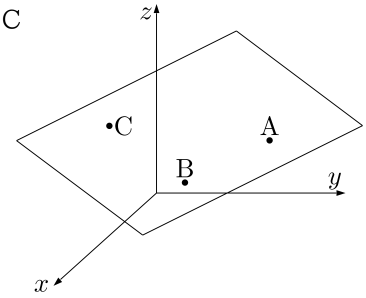
問題 002（バリエーション No.1）

３点 A$(-4,\ 4,\ 1)$，B$(1,\ 2,\ 1)$，C$(1,\ -2,\ 4)$ を通る平面の方程式は

$$6x + \boxed{\text{アイ}}\, y + \boxed{\text{ウエ}}\, z - \boxed{\text{オカ}} = 0$$

である．

平面の方程式を $ax + by + cz + d = 0$ とすると，A，B，C 点の座標を代入して，



$$\begin{cases} -4a + 4b + c + d = 0 & \cdots\cdots\cdots ① \\ a + 2b + c + d = 0 & \cdots\cdots\cdots ② \\ a - 2b + 4c + d = 0 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

この連立方程式を解く．② − ① より

$$5a - 2b = 0$$

$$a = \frac{2}{5}b \quad \cdots ④$$

② − ③ より

$$4b - 3c = 0$$

$$c = \frac{4}{3}b \quad \cdots ⑤$$

④ と ⑤ を ① に代入

$$-\frac{8}{5}b + 4b + \frac{4}{3}b + d = 0$$

$$d = -\frac{56}{15}b \quad \cdots ⑥$$

④，⑤，⑥ を平面の方程式 $ax + by + cz + d = 0$ に代入して，

$$\frac{2}{5}bx + by + \frac{4}{3}bz - \frac{56}{15}b = 0$$

$$6x + \mathbf{15}y + \mathbf{20}z - \mathbf{56} = 0$$

【別の解法】

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトル $\overrightarrow{n}\ (a,\ b,\ c)$ として，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

より，$\overrightarrow{n}$ を求め，1 点の座標，例えば A $(-4,\ 4,\ 1)$ を用いて

$$a\{x - (-4)\} + b(y - 4) + c(z - 1) = 0$$

として解を得る．各自で確かめてみて下さい．

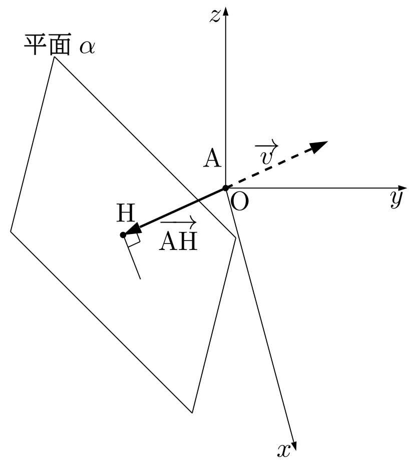
問題 003（バリエーション No.1）

点 A(0,　0,　0) と平面 $\alpha : x + 2y + 2z + 9 = 0$ との距離を求めてみよう．

α の法線ベクトルを $\overrightarrow{v}$，A から α へ引いた垂線の足を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ と $\overrightarrow{v}$ のなす角を θ とおくと，

$\overrightarrow{v} = \left(1,\ \boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$，$|\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{v}| = \boxed{\text{ウ}}$，$|\cos\theta| = \boxed{\text{エ}}$ であるから，

求める距離、すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|$ は $\boxed{\text{オ}}$ であることがわかる．



平面の式の一般形 $ax + by + cz + d = 0$ と α の式を比較すれば，$a = 1$，$b = 2$，$c = 2$ で，$(a,\ b,\ c)$ が法線ベクトルなので

$$\overrightarrow{v} = (1,\ \mathbf{2},\ \mathbf{2})$$

H の座標を (x_h, y_h, z_h) とすると，求める $|\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{v}|$ は，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{v}| &= 1 \times x_h + 2 \times y_h + 2 \times z_h \\ &= |x_h + 2y_h + 2z_h|\end{aligned}$$

また，H は平面上の点だから，平面の式に代入して，

$$\begin{aligned}x_h + 2y_h + 2z_h + 9 &= 0 \\ x_h + 2y_h + 2z_h &= -9\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{v}| &= |-9| \\ &= \mathbf{9}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ と $\overrightarrow{v}$ は，なす角は 0（もしくは π）だから，

$$\begin{aligned}|\cos\theta| &= |\cos 0| \\ &= \mathbf{1}\end{aligned}$$

従って，内積の公式より，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{v}| &= |\,|\overrightarrow{\mathrm{AH}}||\overrightarrow{v}|\cos\theta\,| \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{AH}}||\overrightarrow{v}||\cos\theta|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{AH}}| &= \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}||\cos\theta|} \\ &= \frac{9}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \times 1} \\ &= \frac{9}{3} \\ &= \mathbf{3}\end{aligned}$$

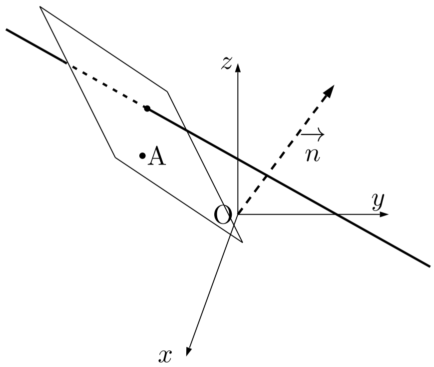
問題 004（バリエーション No.1）

点 $\mathrm{A}(-2,\ -7,\ 2)$ を通り、$\overrightarrow{n}=(-7,\ 4,\ 2)$ に垂直な平面がある。この平面と、直線

$$\frac{x+4}{-4}=\frac{y-2}{8}=\frac{z+2}{-9}$$

との交点の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$ である．

まず，平面の式を求め，そこに媒介変数表示した直線の式の成分を代入して，交点の座標を得る．



$(a,\ b,\ c)$ を法線ベクトルとし，一点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通る平面の方程式は，$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ で表せるので，点 A，$\overrightarrow{n}$ の数値を当てはめて，

$$\begin{aligned}-7\{x-(-2)\}+4\{y-(-7)\}+2(z-2)&=0\\-7x-14+4y+28+2z-4&=0\\-7x+4y+2z+10&=0\quad\cdots\ ①\end{aligned}$$

与えられた直線の方程式を媒介変数 t を用いて表すと，

$$\begin{cases}x=-4-4t\\y=2+8t\\z=-2-9t\end{cases}\qquad\cdots\cdots\ ②$$

直線上の一点が平面と交わるときの t を求める．① にあてはめて，

$$\begin{aligned}-7(-4-4t)+4(2+8t)+2(-2-9t)+10&=0\\28+28t+8+32t-4-18t+10&=0\\42t+42&=0\\t&=-1\end{aligned}$$

これを ② に代入して，

$$\begin{cases}x=-4-4\times(-1)=0\\y=2+8\times(-1)=-6\\z=-2-9\times(-1)=7\end{cases}$$

よって，　　$\mathbf{(0,\ -6,\ 7)}$

問題 005（バリエーション No.1）

２つの平面

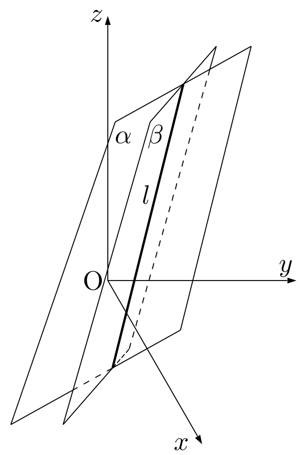
$$\alpha : 4x+5y-9z-1=0$$
$$\beta : 6x+8y-7z-4=0$$

の交線（平面が交わってできる直線）l の方程式は

$$l : \frac{x+\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}} = \frac{y-\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカキ}}} = \frac{z}{2}$$

である．

交線の座標 $(x,\ y,\ z)$ は，2 つの平面の式 α，β 上の点なので，連立方程式を解く形となる．



$$\begin{cases} 4x+5y-9z-1=0 & \cdots ① \\ 6x+8y-7z-4=0 & \cdots ② \end{cases}$$

l の方程式は，$\left(=\frac{z}{2}\right)$ となっているので，x と z の式，y と z の 2 つの式を得ることを目標とする．① × 3 − ② × 2 で，まず，x を消去して，

$$\begin{array}{rrrrrl} & 12x & +15y & -27z & -3 & =0 \\ -\,) & 12x & +16y & -14z & -8 & =0 \\ \hline & & -y & -13z & +5 & =0 \end{array}$$

$$y = -13z + 5 \quad \cdots\cdots ③$$

① に ③ を代入して，

$$\begin{aligned} 4x+5(-13z+5)-9z-1&=0 \\ 4x-65z+25-9z-1&=0 \\ 4x-74z+24&=0 \\ 4x&=74z-24 \\ x&=\frac{37}{2}z-6 \quad \cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

③，④ から $\left(=\frac{z}{2}\right)$ の形を作ると

③より　$\dfrac{y-5}{-13}=z$

$\dfrac{y-5}{-26}=\dfrac{z}{2}$

④より　$\dfrac{x+6}{37}=\dfrac{z}{2}$

$$\therefore\ \frac{x+\mathbf{6}}{\mathbf{37}} = \frac{y-\mathbf{5}}{\mathbf{-26}} = \frac{z}{2}$$