［コース ID：44］　線形代数 I

44.10　空間ベクトル（直線の方程式）

44.10.1　空間ベクトル（直線の方程式）

問題 001（バリエーション No.1）

２点 A$(3,\ 1,\ -1)$，B$(5,\ 3,\ 3)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}=\frac{z+\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である．

直線の方程式上の点 P$(x,\ y,\ z)$ を 媒介変数 t を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\end{aligned}$$

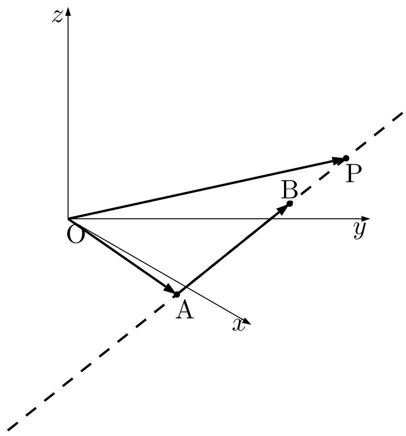
$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z)&=(3,\ 1,\ -1)+t\{(5,\ 3,\ 3)-(3,\ ,1,\ -1)\}\\&=(3,\ 1,\ -1)+t(2,\ 2,\ 4)\\&=(3+2t,\ 1+2t,\ -1+4t)\end{aligned}$$

P$(x,\ y,\ z)$ に関して $t=$ の式に変形すると

$$x=\ 3+2t \text{ より } \quad t=\frac{x-3}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

$$y=\ 1+2t \text{ より } \quad t=\frac{y-1}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

$$z=-1+4t \text{ より } \quad t=\frac{z+1}{4} \quad \cdots\cdots ③$$



①，②，③ より

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-\mathbf{1}}{\mathbf{2}}=\frac{z+\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

【公式にあてはめれば】

1 点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)=\mathbf{(3,\ 1,\ -1)}$《←点 A》を通り，方向ベクトル $\overrightarrow{w}=(w_x,\ w_y,\ w_z)=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5,\ 3,\ 3)-(3,\ 1,\ -1)=\mathbf{(2,\ 2,\ 4)}$ とすれば，

$$\boldsymbol{\frac{x-x_0}{w_x}=\frac{y-y_0}{w_y}=\frac{z-z_0}{w_z}}$$

にあてはめて解を得る．

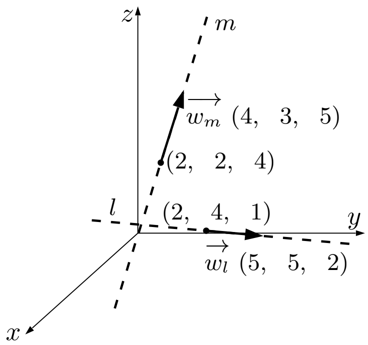
問題 002（バリエーション No.1）

空間内の２つの直線

$$l : \frac{x-2}{5} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-1}{2}$$
$$m : \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{5}$$

のなす角 θ 　$(0 \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ は $\boxed{\text{アイ}}$ $^\circ$ である．

２つの直線のなす角 θ は，直線 l の方向ベクトル $\overrightarrow{w_l} = (5,\ \ 5,\ \ 2)$，直線 m の方向ベクトル $\overrightarrow{w_m} = (4,\ \ 3,\ \ 5)$ のなす角 θ を求めればよい．



$$\begin{aligned}\overrightarrow{w_l} \cdot \overrightarrow{w_m} &= 5 \times 4 + 5 \times 3 + 2 \times 5 \\ &= 45\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{w_l}| &= \sqrt{5^2 + 5^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{54} \\ &= 3\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{w_m}| &= \sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{50} \\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

これらから，$\cos\theta$ を求める．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w_l} \cdot \overrightarrow{w_m} &= |\overrightarrow{w_l}||\overrightarrow{w_l}| \cos\theta \\ 45 &= 3\sqrt{6} \times 5\sqrt{2} \cos\theta \\ \cos\theta &= \frac{45}{30\sqrt{3}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

よって，$0 \leqq \theta \leqq 90^\circ$ なので，

$$\theta = \mathbf{30}^\circ$$

問題 003（バリエーション No.1）

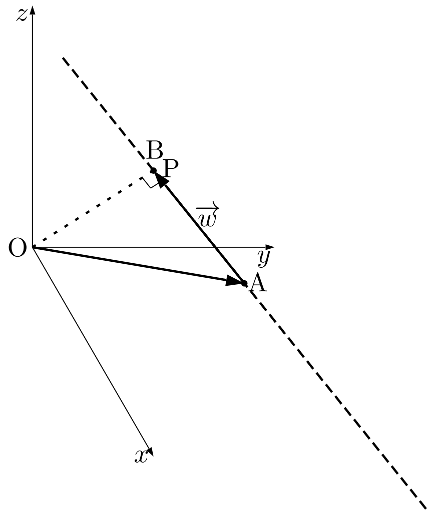
２点 A(3,　2,　2),　B(2,　1,　3) を通る直線上の点で、原点との距離が最小となるような点の座標は

(ア ,　 イ ,　 ウ) である．

1 点 A(3,　2,　2) を通り，方向ベクトル $\overrightarrow{w}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とする直線上の点 P $(x,\ y,\ z)$ を 媒介変数 t を用いて表すと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (2,\ 1,\ 3) - (3,\ 2,\ 2)\\ &= (-1,\ -1,\ 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ (x,\ y,\ z) &= (3,\ 2,\ 2) + t(-1,\ -1,\ 1)\\ &= (3-t,\ 2-t,\ 2+t) \qquad \cdots\cdots\cdots ①\end{aligned}$$



P 点が原点との距離を最小にするときの t を求める．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は垂直になるので，内積が 0 となる．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (3-t)\times(-1) + (2-t)\times(-1) + (2+t)\times 1\\ 0 &= -3 + t - 2 + t + 2 + t\\ 0 &= -3 + 3t\\ t &= 1\end{aligned}$$

すなわち，$t = 1$ を ① へ代入すると

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= (3-1,\ 2-1,\ 2+1)\\ &= \mathbf{(2,\ 1,\ 3)}\end{aligned}$$

（この問題の場合 $t = 1$ なので，求める点と B 点が一致している．）

問題 004（バリエーション No.1）

２つの直線

$$l : \frac{x-1}{4} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-2}{-1}$$
$$m : \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2} = z-5$$

の「距離」を求めてみよう．
直線 l，m のいずれとも垂直な単位ベクトル $\overrightarrow{e}$ を求めると，

$$\overrightarrow{e} = \left(\pm\frac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イ}},\ \mp\frac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}},\ \mp\frac{\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}\right)$$

（複号同順）となる．
次に、l 上の点 A$\left(1,\ \boxed{キ},\ \boxed{ク}\right)$，および m 上の点 B$\left(2,\ \boxed{ケ},\ \boxed{コ}\right)$ について，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(\boxed{サ},\ \boxed{シ},\ \boxed{ス}\right)$$

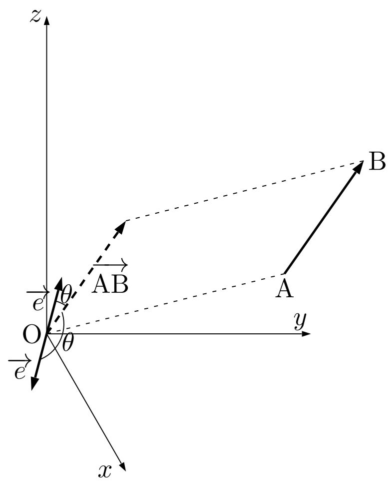
を考える．
ここで、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の、ベクトル $\overrightarrow{e}$ への正射影ベクトルの大きさが、２直線間の最短距離に等しくなることに着目すると、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{e}$ のなす角を θ とすれば、正射影ベクトルの大きさは

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\cos\theta|$$

であるから、求める距離は $\sqrt{\boxed{セ}}$ であることがわかる．

直線 l，m の方向ベクトルはそれぞれ，

l ：(4，5，−1)
m ：(3，2，1)



双方に垂直なベクトル $\overrightarrow{n}$ を $(n_x,\ n_y,\ n_z)$ とおくと，
互いに垂直なベクトルの内積 $=0$ なので，

（l と n の内積）：$4n_x + 5n_y - n_z = 0$ ……①
（m と n の内積）：$3n_x + 2n_y + n_z = 0$ ……②

① + ② より，

$$7n_x + 7n_y = 0$$
$$n_y = -n_x \quad \cdots\cdots ③$$

③ を ① に代入して，

$$4n_x - 5n_x - n_z = 0$$
$$n_z = -n_x$$

よって $\overrightarrow{n} = (n_x,\ \ -n_x,\ \ -n_x) = (1,\ \ -1,\ \ -1)n_x$ なので，$\overrightarrow{e}$ は，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e} &= \pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}(1,\ \ -1,\ \ -1) \\
&= \pm\frac{\sqrt{3}}{3}(1,\ \ -1,\ \ -1) \\
&= \left(\pm\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}},\ \ \mp\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}},\ \ \mp\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}\right) \qquad \text{（複号同順）}
\end{aligned}$$

直線の方程式より l は，$(1,\ \ \mathbf{4},\ \ \mathbf{2})$ を通り，m は，$(2,\ \ \mathbf{5},\ \ \mathbf{5})$ を通るので，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= (2,\ \ 5,\ \ 5) - (1,\ \ 4,\ \ 2) \\
&= (\mathbf{1},\ \ \mathbf{1},\ \ \mathbf{3})
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{e}$（単位ベクトル:大きさ 1）の内積は，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{e} &= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \times 1 \times \cos\theta \\
&= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta
\end{aligned}$$

であり，この絶対値が，求める正射影ベクトルの大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\cos\theta|$ なので，2 つのベクトルの内積の絶対値を成分より求めると，

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\cos\theta| &= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{e}| \\
&= |(1,\ \ 1,\ \ 3)\cdot(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ \ \mp\frac{\sqrt{3}}{3},\ \ \mp\frac{\sqrt{3}}{3})| \\
&= |\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \mp \frac{\sqrt{3}}{3} \mp \sqrt{3}| \\
&= |\mp\sqrt{3}| \\
&= \sqrt{\mathbf{3}}
\end{aligned}$$