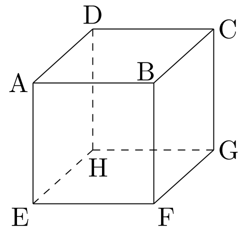
［コース ID：44］　線形代数 I

44.9　空間ベクトル（内積）

44.9.1　空間ベクトル（内積）

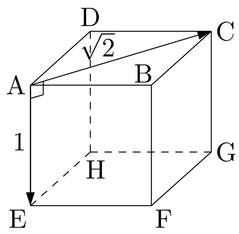
問題 001（バリエーション No.1）

一辺の長さが 1 の立方体 ABCD − EFGH について，
内積 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}}$ の値は $\boxed{\text{ア}}$ となる．



$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}| = 1$，$\angle\mathrm{CAE} = 90^\circ$ であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}} &= |\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{AE}}| \cos\angle\mathrm{CAE} \\ &= \sqrt{2} \times 1 \times \cos 90^\circ \\ &= \sqrt{2} \times 1 \times 0 \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$



【答】　$\mathbf{0}$

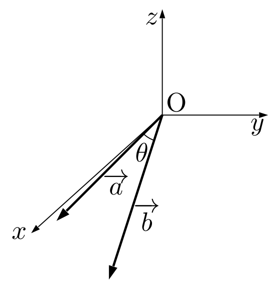
問題 002（バリエーション No.1）

$\overrightarrow{a} = (0,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{b} = (-1,\ -1,\ -2)$ のなす角 θ の値を，以下のなかから選び，その番号を $\boxed{\text{ア}}$ へマークせよ．

⓪ 0　① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{\pi}{2}$　⑤ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑥ $\dfrac{3}{4}\pi$　⑦ $\dfrac{5}{6}\pi$　⑧ π

$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ の成分が与えられているので，内積の計算をすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= 0 \times (-1) + (-1) \times (-1) + (-1) \times (-2) \\ &= 3 \quad \cdots\cdots\cdots ①\end{aligned}$$



また，

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

なので，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ のなす角を θ として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} &= |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta \\ &= \sqrt{2}\times\sqrt{6}\times\cos\theta \\ &= 2\sqrt{3}\cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

② = ① だから，

$$\begin{aligned}2\sqrt{3}\cos\theta &= 3 \\ \cos\theta &= \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

選択肢は，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ なので，

$$\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

【答】 ①

問題 003（バリエーション No.1）

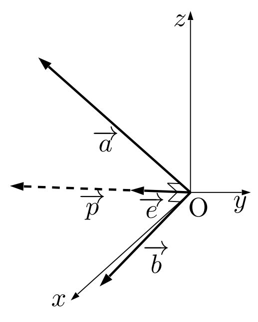
２つのベクトル $\overrightarrow{a} = (-5,\ -5,\ 0)$，$\overrightarrow{b} = (-1,\ -2,\ -2)$ の両方に垂直な単位ベクトル $\overrightarrow{e}$ のうち，x 成分が正のものは

$$\overrightarrow{e} = \left(\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \frac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}},\ \frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\right)$$ である．

$\overrightarrow{a} = (-5,\ -5,\ 0)$，$\overrightarrow{b} = (-1,\ -2,\ -2)$ の両方に垂直なベクトルを $\overrightarrow{p} = (p_x,\ p_y,\ p_z)$ とおく．$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ より，互いに垂直なベクトルの内積は 0 になるので，成分を計算して，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p} &= (-5)\times p_x + (-5)\times p_y + 0\times p_z = 0 \\ -5p_x - 5p_y &= 0 \\ p_x &= -p_y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{p} &= (-1)\times p_x + (-2)\times p_y + (-2)\times p_z = 0 \\ -p_x - 2p_y - 2p_z &= 0 \\ p_z &= -\frac{1}{2}p_x - p_y \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$



① を ② に代入して，

$$\begin{aligned}p_z &= -\frac{1}{2}(-p_y) - p_y \\ &= -\frac{1}{2}p_y\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p} &= \left(-p_y,\ \ p_y,\ \ -\frac{1}{2}p_y\right)\\ &= \left(-1,\ \ 1,\ \ -\frac{1}{2}\right)\ p_y \qquad \cdots\cdots\cdots ③\end{aligned}$$

これより，$\overrightarrow{p}$ の方向ベクトルの一つで，x 成分が正のものを $\overrightarrow{p_1}$ とすると，（③ で $p_y = -2$ として）

$$\overrightarrow{p_1} = (2,\ \ -2,\ \ 1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

と出来る．この大きさは

$$\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$$

なので，④ の各成分を $\times\dfrac{1}{3}$ して，大きさが 1 のベクトル（単位ベクトル）を求めると，

$$\overrightarrow{e} = \left(\boldsymbol{\frac{2}{3}},\ \ \boldsymbol{\frac{-2}{3}},\ \ \boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)$$

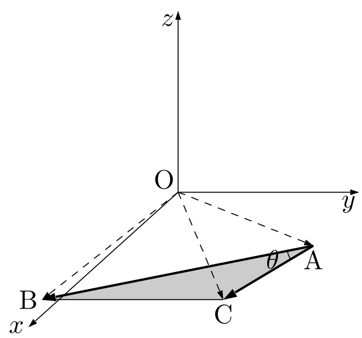
問題 004（バリエーション No.1）

A$(-5,\ \ 2,\ \ -4)$，B$(-1,\ \ -5,\ \ -4)$，C$(-1,\ \ 1,\ \ -4)$ のとき，△ABC の面積は $\boxed{\text{アイ}}$ である．

△ABC の面積 S は，2 辺の長さ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ とその挟む角を θ とすると，

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta$$

で計算できるので，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$，$\sin\theta$ の値を求める．



まず，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を成分表示すると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (-1,\ \ -5,\ \ -4) - (-5,\ \ 2,\ \ -4)\\ &= (4,\ \ -7,\ \ 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (-1,\ \ 1,\ \ -4) - (-5,\ \ 2,\ \ -4)\\ &= (4,\ \ -1,\ \ 0)\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| &= \sqrt{4^2 + (-7)^2 + 0^2}\\ &= \sqrt{65}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| &= \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 0^2}\\ &= \sqrt{17}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= 4 \times 4 + (-7) \times (-1) + 0 \times 0\\ &= 23\end{aligned}$$

よって 内積から $\cos\theta$ を求めて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta\\ 23 &= \sqrt{65}\times\sqrt{17}\cos\theta\\ \cos\theta &= \frac{23}{\sqrt{65\times17}}\end{aligned}$$

これより $\sin\theta$ を求めると

$$\begin{aligned}\sin^2\theta &= 1-\cos^2\theta\\ &= 1-\left(\frac{23}{\sqrt{65\times17}}\right)^2\\ &= \frac{1105-529}{65\times17}\\ &= \frac{24^2}{65\times17}\end{aligned}$$

$0<\theta<\pi$として

$$\sin\theta = \frac{24}{\sqrt{65\times17}}$$

よって $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{65}\sqrt{17}\frac{24}{\sqrt{65}\sqrt{17}}\\ &= \mathbf{12}\end{aligned}$$