［コース ID：44］　線形代数 I

44.6　平面ベクトル（線形独立・線形従属）

44.6.1　平面ベクトル（線形独立・線形従属）

問題 001（バリエーション No.1）

$\overrightarrow{a} = (6,\ -8)$,　$\overrightarrow{b} = (-7,\ 8)$,　$\overrightarrow{p} = (-1,\ -8)$ のとき
$\overrightarrow{p} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$ となるような s，t の値は
$s = \boxed{\text{ア}}$，$t = \boxed{\text{イ}}$ である。

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は平行ではない（線形独立）から，$\overrightarrow{p}$ はただ一通りに $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の線形結合で表すことができるはずである。
$s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$ を成分表示で表すと（以下は、見やすさのため列ベクトル形式で書く）

$$\begin{aligned} s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} &= s\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6s \\ -8s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7t \\ 8t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6s - 7t \\ -8s + 8t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これが $\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$ に等しい，とするならば

$$\begin{aligned} 6s - 7t &= -1 \\ -8s + 8t &= -8 \end{aligned}$$

が成り立つ。この２式を連立させて s，t を求めると，$s = 8$，$t = 7$ を得る。

【答】　$\boldsymbol{s = 8,\ t = 7}$

問題 002（バリエーション No.1）

△ABC において，辺 AB を 1 : 1 に内分する点を P，辺 AC を 1 : 2 に内分する点を Q とする。また，線分 BQ と CP の交点を K とし，直線 AK と直線 BC との交点を R とする。このとき

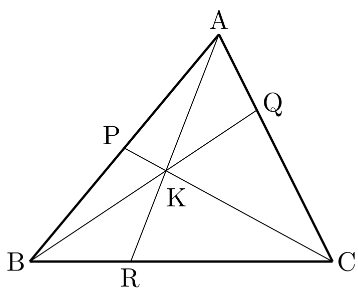
$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となる。



$\mathrm{AQ} = \dfrac{1}{3}\mathrm{AC}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\ &= -\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \boldsymbol{\frac{1}{3}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

また，$\mathrm{AP} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ &= -\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

次に，K は BQ 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{BK}} = s\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ とおくことができるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AK}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BK}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\ &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{s}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

K は CP 上の点でもあるから，$\overrightarrow{\mathrm{CK}} = t\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ とおくことができるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AK}} &= \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CK}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AC}} + t\overrightarrow{\mathrm{CP}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AC}} + t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\ &= \frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

①，② より

$$(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{s}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は線形独立である（平行でない）から，

$$1-s=\frac{t}{2}$$
$$\frac{s}{3}=1-t$$

が成り立ち，この２式より，$s=\frac{3}{5}$，$t=\frac{4}{5}$ が得られる。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AK}}&=\left(1-\frac{3}{5}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\boldsymbol{\frac{2}{5}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boldsymbol{\frac{1}{5}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

最後に $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を求める。R は直線 BC 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(1-r)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+r\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad\cdots\cdots③$$

とおくことができる。さらに、A，K，R は同一直線上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=k\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ とおけるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}}&=k\overrightarrow{\mathrm{AK}}\\&=k\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\&=\frac{2}{5}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{5}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad\cdots\cdots④\end{aligned}$$

③，④ より（$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は線形独立なので）

$$1-r=\frac{2}{5}k$$
$$r=\frac{1}{5}k$$

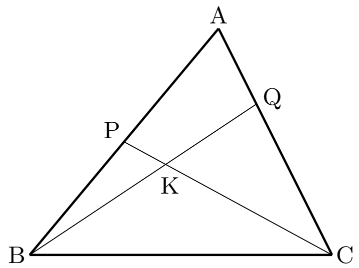
これらを連立させて解けば，$k=\frac{5}{3}$，$r=\frac{1}{3}$ を得る。従って

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}}&=\left(1-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boldsymbol{\frac{1}{3}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

右の図で

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AP}}\cdot\frac{\mathrm{KQ}}{\mathrm{BK}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{QC}}=1$$
$$\frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{AQ}}\cdot\frac{\mathrm{KP}}{\mathrm{CK}}\cdot\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{PB}}=1$$

などが成り立つ（**メネラウスの定理**）。
これを使って $\overrightarrow{\mathrm{BK}}$ や $\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ などを直接求めることもできる。
（各自やってみよ）



問題 003（バリエーション No.1）

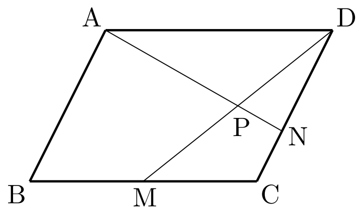
平行四辺形 ABCD において，BC を 1 : 1 に内分する点を M，CD を 1 : 2 に内分する点を N とし，AN と DM の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$ とおくとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \vec{a} + \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{a} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{b}$$

となる。



M は BC の中点なので $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{1}{2}\vec{b}$。従って

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AM}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} \\ &= \vec{a} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{b}\end{aligned}$$

N は CD を 1 : 2 に内分する点なので $\overrightarrow{\mathrm{DN}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{2}{3}\vec{a}$。
従って

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AN}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DN}} \\ &= \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a} \\ &= \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

P は AN 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ とおくことができる。そうすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= k\overrightarrow{\mathrm{AN}} \\ &= k\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}\right) \\ &= \frac{2}{3}k\vec{a} + k\vec{b} \qquad \cdots\cdots①\end{aligned}$$

一方，P は DM 上の点でもあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AM}} + t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおくこともできる。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= (1-t)\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) + t\vec{b} \\ &= (1-t)\vec{a} + \left(t + \frac{1}{2}\right)\vec{b} \qquad \cdots\cdots②\end{aligned}$$

①，② より，

$$\frac{2}{3}k\vec{a} + k\vec{b} = (1-t)\vec{a} + \frac{1}{2}(1+t)\vec{b}$$

が成り立ち，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は線形独立であるから

$$\frac{2}{3}k = 1 - t$$

$$k = \frac{1}{2}(1+t)$$

が成り立つ。これらを連立させて解くと，$k=\dfrac{3}{4}$，$t=\dfrac{1}{2}$ を得る。従って

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\overrightarrow{a}+\frac{3}{4}\overrightarrow{b}\\ &= \mathbf{\frac{1}{2}}\overrightarrow{a}+\mathbf{\frac{3}{4}}\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

問題 004（バリエーション No.1）

$\triangle\mathrm{OAB}$ において，$\mathrm{OA}=\sqrt{3}$, $\mathrm{OB}=\sqrt{2}$, $\mathrm{AB}=2$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$ とする。

このとき，内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ の値は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

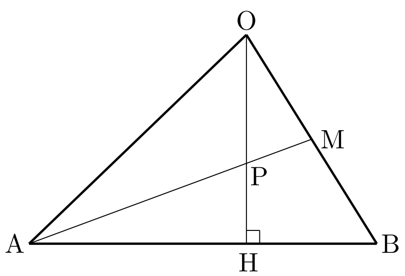
次に，OB の中点を M，頂点 O から辺 AB へ下した垂線の足を H，OH と AM の交点を P とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{a}+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{b},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}\overrightarrow{a}+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}\overrightarrow{b}$$

である。

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とすると，余弦定理により



$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}\\ &= \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}}\end{aligned}$$

内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} &= \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta\\ &= \sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}\\ &= \mathbf{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

H は直線 AB 上の点であるから $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-t)\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ とおける。
また，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \left\{(1-t)\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right\}\cdot\left\{\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\right\}\\ &= (1-t)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-(1-t)\left|\overrightarrow{a}\right|^2+t\left|\overrightarrow{b}\right|^2-t\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}\\ &= (1-2t)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-3(1-t)+2t\\ &= \frac{1}{2}(1-2t)-3+5t\\ &= 4t-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

OH⊥AB であるから $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ なので

$$4t-\frac{5}{2}=0$$
$$\therefore\ t=\frac{5}{8}$$

従って

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(1-\frac{5}{8}\right)\vec{a}+\frac{5}{8}\vec{b}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3}{8}}\vec{a}+\boldsymbol{\frac{5}{8}}\vec{b}$$

【別解】

内積を使わずに解くなら，$\mathrm{AH}=x$ とおくと，三平方の定理から

$$(\sqrt{3})^2-x^2=(\sqrt{2})^2-(2-x)^2$$

が成り立つ。これを解けば $x=\dfrac{5}{4}$ が得られ，$\mathrm{AH}:\mathrm{HB}=5:3$ であることがわかる。

次に，P は垂線 OH 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$
$$=\frac{3}{8}k\vec{a}+\frac{5}{8}k\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$

とおける。また，P は AM 上の点でもあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$
$$=(1-s)\vec{a}+\frac{s}{2}\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$

とおくこともできる。①，② より，

$$\frac{3}{8}k\vec{a}+\frac{5}{8}k\vec{b}=(1-s)\vec{a}+\frac{s}{2}\vec{b}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は線形独立であるから

$$\frac{3}{8}k=1-s$$
$$\frac{5}{8}k=\frac{s}{2}$$

が成り立つ。これを解けば，$k=\dfrac{8}{13}$，$s=\dfrac{10}{13}$ を得る。従って

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{13}\vec{a}+\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{13}\vec{b}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3}{13}}\vec{a}+\boldsymbol{\frac{5}{13}}\vec{b}$$