［コース ID：44］　線形代数 I

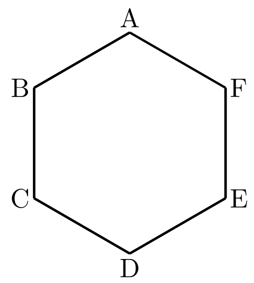
44.1　平面ベクトル（ベクトルとスカラー・和と差）

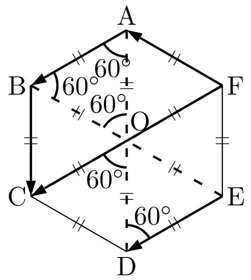
44.1.1　ベクトルとスカラー

問題 001（バリエーション No.1）

正 6 角形 ABCDEF において、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$ とするとき，次のうち，$\vec{a}$ と等しいベクトルは $\boxed{\text{ア}}$ である．

0 $\overrightarrow{\mathrm{FA}}$
1 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$
2 $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$
3 $\overrightarrow{\mathrm{FC}}$
4 $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$





正六角形なので，対角線の交点を O とすると，左図のようになる．

ここで，∠AOB は，360° の 6 等分なので，60° かつ △OAB は、OA = OB の二等辺三角形なので，△OAB は，正三角形となる．同様に，△OBC，△OCD，△ODE，△OEF，△OFA も正三角形となる．
すなわち，∠BAO = ∠COD = ∠EDO(= 60°) なので，AB // FC // ED.

よって，選択肢のうち $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平行で向きが等しいベクトルは，$\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{FC}}$ である．そのうち，大きさも等しいものは $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ のみである．

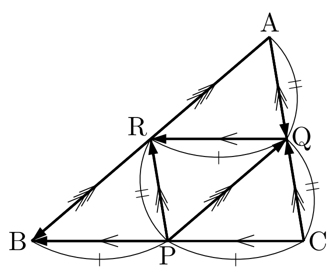
【答】 2

問題 002（バリエーション No.1）

△ABC の辺 BC，CA，AB の中点を，それぞれ P，Q，R とする．
次のうち，誤っているものは $\boxed{\text{ア}}$ である．

0 $\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ である．
1 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ である．
2 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ である．
3 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ の逆ベクトルである．

△ABC は，右図のように表せるので，



0　QR // CB で方向が等しくかつ向きが等しい．さらに大きさが QR = PB と等しいので，正しい．

1　PQ // BA であるが向きが逆で 大きさも AB = 2PQ であ

るから，誤り．

② AQ と CQ は同一直線状にあるので，方向が等しく，向きが逆である．これを マイナスで反転させると，向きが等しくなる．かつ 大きさに関して $\mathrm{AQ} = \mathrm{CQ}$ であるから，正しい．

③ $\mathrm{PR} \,/\!/\, \mathrm{AC}$ で方向が等しく，向きが逆． 大きさに関して $\mathrm{PR} = \mathrm{AQ}$ である．逆ベクトルとは，向きが逆で大きさの等しいベクトルなので，正しい．

【答】 ①

問題 003（バリエーション No.1）

平面上に、一直線上にない４つの異なる点 A， B， C， D があり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を満たしている．次のうち、正しいものは $\boxed{\text{ア}}$ である．

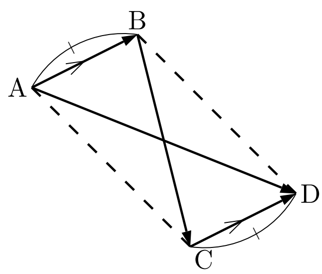
⓪ 四角形 ABDC は長方形である．

① $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ である．

② ２つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$と$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は等しい．

③ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるなら、四角形 ACDB はひし形である．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は，右図のように表せるので，



⓪ $\mathrm{AB} \,/\!/\, \mathrm{CD}$ で，かつ大きさが $\mathrm{AB} = \mathrm{CD}$ である．四角形 ABDC は，対辺が平行で等しいため，平行四辺形といえる．しかし，4 つの角が等しいわけではないので，長方形とはいえない．誤り．

① 上記⓪により，四角形 ABDC は，平行四辺形である．従って， $\mathrm{AC} \,/\!/\, \mathrm{BD}$ であり，向きが等しく，かつ $\mathrm{AC} = \mathrm{BD}$ であるから，正しい．

② AD と BC は平行四辺形の対角線であり，$\mathrm{AD} \nparallel \mathrm{BC}$．よって，誤り．

③ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるなら，始点が A で向き・大きさが等しいため，B 点と C 点は一致する．これは，一直線上にない 4 つの異なる点 A , B , C , D という前提条件に矛盾する．よって，誤り．（ひし形であるためには，ベクトル表記でなく，大きさのみが等しい AB=AC であるべきである．）

【答】 ①

問題 004（バリエーション No.1）

次の $\boxed{\text{ア}}$ にあてはまるものを、後の ⓪〜③ から選び、その番号をマークせよ。

同一平面上の異なる４点 A, B, C, D について、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ であることは，直線 AB と CD が平行であるための $\boxed{\text{ア}}$.

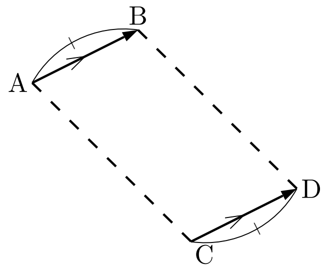
⓪ 必要十分条件である

① 必要条件だが十分条件ではない

② 十分条件だが必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を図示すると，右のようになる．



p ： $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ である

q ： 直線 AB と CD が平行である

とすると，
$p \Longrightarrow q$ は，ベクトルが等しいなら，向きが等しく，互いに平行となる．真である．

$q \Longrightarrow p$ は，直線 AB と CD が 平行であっても AB $\fallingdotseq$ CD であれば，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \fallingdotseq \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ であり，偽である．（また，直線 AB と CD が 平行 かつ AB $=$ CD であっても，向きが逆であれば同じく p は成立しない．）

よって，p は十分条件ではあるが，必要条件ではない．

【答】　②

44.1.2　ベクトルの和と差の計算

問題 001（バリエーション No.1）

$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ を互いに平行ではないベクトルとするとき，次式

$$2(\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}) - 3(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$$

を $p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b}$ の形に簡単にすると，
$p = \boxed{\text{アイ}}$ ，$q = \boxed{\text{ウエ}}$ である．

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は互いに平行でないので，かっこを外して，$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ それぞれの係数を求める．

$$\begin{aligned}2(\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}) - 3(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) &= 2\overrightarrow{a} - 6\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} \\ &= (2-3)\overrightarrow{a} + (-6+3)\overrightarrow{b} \\ &= -\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{p = -1}$, $\boldsymbol{q = -3}$

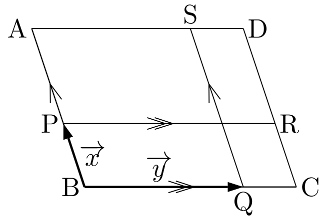
問題 002（バリエーション No.1）

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $3:2$ に内分する点を P，辺 BC を $3:1$ に内分する点を Q とする．

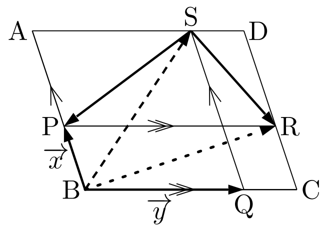
辺 CD 上の点 R および辺 DA 上の点 S をそれぞれ PR // BC，SQ // AB となるようにとり，$\overrightarrow{x}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}$，$\overrightarrow{y}=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{SP}}=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{x}+\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\overrightarrow{y}$$



である．



右図より

$$\overrightarrow{\mathrm{SP}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{BS}}$$

となり，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{x}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{BS}}$ を求めると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BS}}&=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QS}}\\&=\overrightarrow{y}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}&&(\because \overrightarrow{\mathrm{QS}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}})\\&=\overrightarrow{y}+\frac{3+2}{2}\overrightarrow{x}&&(\because \mathrm{PA}:\mathrm{BP}=3:2\text{ より},\mathrm{BA}:\mathrm{BP}=3+2:2)\\&=\frac{5}{2}\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{SP}}&=\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{BS}}\\&=\overrightarrow{x}-(\frac{5}{2}\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})\\&=\boldsymbol{\frac{-3}{2}\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}}\end{aligned}$$

同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=\overrightarrow{\mathrm{BR}}-\overrightarrow{\mathrm{BS}}$$

であり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BR}}&=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CR}}\\&=\frac{3+1}{3}\overrightarrow{y}+\overrightarrow{x}&&(\because\ \overrightarrow{\mathrm{CR}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{x}\text{ また，}\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=3:1\text{ より，}\mathrm{BC}:\mathrm{BQ}=3+1:3)\\&=\overrightarrow{x}+\frac{4}{3}\overrightarrow{y}\end{aligned}$$

よって

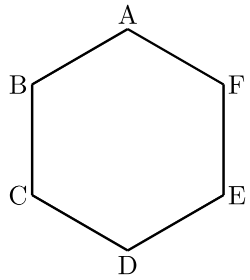
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{SR}} &= \overrightarrow{\mathrm{BR}} - \overrightarrow{\mathrm{BS}} \\
&= (\vec{x} + \frac{4}{3}\vec{y}) - (\frac{5}{2}\vec{x} + \vec{y}) \\
&= \boldsymbol{\frac{-3}{2}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y}}
\end{aligned}$$

問題 003（バリエーション No.1）

正六角形 ABCDEF において、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{x}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{y}$ とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = p\vec{x} + q\vec{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = r\vec{x} + s\vec{y}$$

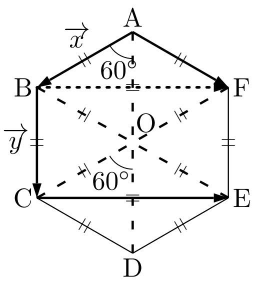


とすれば、p，q，r，s の値はそれぞれ

$p =$ $\boxed{\text{アイ}}$ ，$q =$ $\boxed{\text{ウ}}$

$r =$ $\boxed{\text{エオ}}$ ，$s =$ $\boxed{\text{カ}}$

である．



正六角形なので，対角線の交点を O とすると，左図のようになる．

△OAB，△OBC，△OCD，△ODE，△OEF，△OFA は正三角形である．
すなわち，∠BAO = ∠COD (= 60°) なので，AB // FC．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{FC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\vec{x}$ である．また，$\overrightarrow{\mathrm{FE}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{y}$ なので，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{CE}} &= \overrightarrow{\mathrm{FE}} - \overrightarrow{\mathrm{FC}} \\
&= \vec{y} - 2\vec{x} \\
&= \boldsymbol{-2\vec{x} + \vec{y}}
\end{aligned}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \overrightarrow{\mathrm{CE}}$ なので，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AF}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BF}} \\
&= \vec{x} + \overrightarrow{\mathrm{CE}} \\
&= \vec{x} + (-2\vec{x} + \vec{y}) \\
&= \boldsymbol{-\vec{x} + \vec{y}}
\end{aligned}$$

【答】　$\boldsymbol{p = -1}$ **,** $\boldsymbol{q = 1}$ **,** $\boldsymbol{r = -2}$ **,** $\boldsymbol{s = 1}$

問題 004（バリエーション No.1）

$-2\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}-4\overrightarrow{x}=3(3\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}+\overrightarrow{x})$ のとき、$\overrightarrow{x}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ で表すと

$$\overrightarrow{x}=\frac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$$

となる．

与式の右辺のかっこを外し，$\overrightarrow{x}$ のみを左辺に，その他を右辺に整理すると，

$$\begin{aligned}
-2\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}-4\overrightarrow{x}&=3(3\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}+\overrightarrow{x})\\
-2\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}-4\overrightarrow{x}&=9\overrightarrow{a}+9\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{x}\\
(-4-3)\overrightarrow{x}&=(9+2)\overrightarrow{a}+(9-2)\overrightarrow{b}\\
-7\overrightarrow{x}&=11\overrightarrow{a}+7\overrightarrow{b}\\
\boldsymbol{\overrightarrow{x}}&\boldsymbol{=\frac{-11}{7}\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}}
\end{aligned}$$