［コース ID：44］　線形代数 I

44.2　平面ベクトル（ベクトルの成分）

44.2.1　平面ベクトル（ベクトルの成分）

問題 001（バリエーション No.18）

$\overrightarrow{a}=(-5,\ 0),\ \overrightarrow{b}=(1,\ 3),\ \overrightarrow{p}=-4\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b}$ とするとき

$\overrightarrow{p}=\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウエオ}}\right),\ |\overrightarrow{p}|=\boxed{\text{カキ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$

である。

$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ の成分を与式にあてはめて，計算する．

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{p} &= -4\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b}\\
&= -4(-5\ ,\ 0)-5(1\ ,\ 3)\\
&= (-4\times(-5)\ ,\ -4\times 0)+(-5\times 1\ ,\ -5\times 3)\\
&= (20\ ,\ 0)+(-5\ ,\ -15)\\
&= (20-5\ ,\ 0-15)\\
&= \mathbf{(15\ ,\ -15)}
\end{aligned}
$$

成分を用いたベクトルの大きさは $\sqrt{(x\ \text{成分})^2+(y\ \text{成分})^2}$ で表せるので

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{p}| &= \sqrt{(15)^2+(-15)^2}\\
&= \sqrt{15^2\times 2}\\
&= \mathbf{15\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

問題 002（バリエーション No.10）

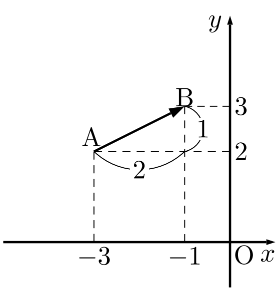
２点 $\mathrm{A}(-3,\ 2),\ \mathrm{B}(-1,\ 3)$ について、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさは

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right),$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$

である。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を座標平面上に書き表すと，右図のようになる．



終点 B から始点 A の x，y 座標を各々引くとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分が得られるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (-1\ ,\ 3) - (-3\ ,\ 2)\\ &= (-1-(-3)\ ,\ 3-2)\\ &= \mathbf{(2\ ,\ 1)}\end{aligned}$$

成分を用いたベクトルの大きさは $\sqrt{(x\text{ 成分})^2 + (y\text{ 成分})^2}$ で表せるので

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| &= \sqrt{2^2+1^2}\\ &= \boldsymbol{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

問題 003（バリエーション No.1）

$\vec{x} = (-3,\ \ -5)$, $\vec{y} = (-1,\ \ -2)$, $\vec{z} = (2,\ \ -3)$ とするとき，$\vec{z}$ を $\vec{x}$, $\vec{y}$ で表すと

$$\vec{z} = \boxed{\text{アイ}}\ \vec{x} + \boxed{\text{ウエ}}\ \vec{y}$$

となる.

a , b を実数として

$$\vec{z} = a\vec{x} + b\vec{y}$$

と表すと

$$\begin{aligned}\vec{z} &= a\vec{x} + b\vec{y}\\ (2\ ,\ -3) &= a(-3\ ,\ -5) + b(-1\ ,\ -2)\\ (2\ ,\ -3) &= (-3a\ ,\ -5a) + (-b\ ,\ -2b)\\ (2\ ,\ -3) &= (-3a-b\ ,\ -5a-2b)\end{aligned}$$

すなわち，次の連立方程式を解いて，

$$\begin{cases}-3a-b=2\\ -5a-2b=-3\end{cases}$$

$$a=-7\ ,\ b=19$$

となるので，

$$\boldsymbol{\vec{z} = -7\vec{x} + 19\vec{y}}$$

問題 004（バリエーション No.1）

２つのベクトル $\overrightarrow{x}$，$\overrightarrow{y}$ について

$$-\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=(-1,\ 0),\quad 3\overrightarrow{x}-4\overrightarrow{y}=(-3,\ -1)$$

が成り立つとき

$\overrightarrow{x}=\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$,
$\overrightarrow{y}=\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$

である．

連立方程式の形にして

$$\begin{cases} -\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=(-1\ ,\ 0) & \cdots ① \\ 3\overrightarrow{x}-4\overrightarrow{y}=(-3\ ,\ -1) & \cdots ② \end{cases}$$

$\overrightarrow{x}$ を消去するため ①$\times 3$ ＋② の成分を計算すると

$$\begin{aligned} (3-4)\overrightarrow{y} &= 3(-1\ ,\ 0)+(-3\ ,\ -1) \\ -\overrightarrow{y} &= (-3+(-3)\ ,\ 0+(-1)) \\ -\overrightarrow{y} &= (-6\ ,-1) \\ \boldsymbol{\overrightarrow{y}} &\boldsymbol{= (6\ ,\ 1)} \end{aligned}$$

① に代入して，

$$\begin{aligned} -\overrightarrow{x}+(6\ ,\ 1) &= (-1\ ,\ 0) \\ -\overrightarrow{x} &= (-1\ ,\ 0)-(6\ ,\ 1) \\ -\overrightarrow{x} &= (-7\ ,-1) \\ \boldsymbol{\overrightarrow{x}} &\boldsymbol{= (7\ ,\ 1)} \end{aligned}$$

問題 005（バリエーション No.1）

k を実数とする．$\overrightarrow{x}=(k,\ -3)$，$\overrightarrow{y}=(4,\ 3)$ について
$-3\overrightarrow{x}+2\overrightarrow{y}$ と $-2\overrightarrow{x}-5\overrightarrow{y}$ が平行であるなら，$k=\boxed{\text{アイ}}$ である．

$-3\overrightarrow{x}+2\overrightarrow{y}$ を成分表示で計算すると

$$\begin{aligned} -3\overrightarrow{x}+2\overrightarrow{y} &= -3(k\ ,\ -3)+2(4\ ,\ 3) \\ &= (-3k\ ,\ 9)+(8\ ,\ 6) \\ &= (-3k+8\ ,\ 15) \end{aligned}$$

同様に，$-2\overrightarrow{x}-5\overrightarrow{y}$ を成分表示で計算すると

$$\begin{aligned} -2\overrightarrow{x}-5\overrightarrow{y} &= -2(k\ ,\ -3)-5(4\ ,\ 3) \\ &= (-2k\ ,\ 6)+(-20\ ,\ -15) \\ &= (-2k-20\ ,\ -9) \end{aligned}$$

これらが平行になるためには，t を実数として，(1 つのベクトル) $= t$(もう一方のベクトル) となればよいので，

$$\begin{aligned} -3\overrightarrow{x}+2\overrightarrow{y} &= t(-2\overrightarrow{x}-5\overrightarrow{y}) \\ (-3k+8\ ,\ 15) &= t(-2k-20\ ,\ -9) \\ &= (-2tk-20t\ ,\ -9t) \end{aligned}$$

成分どうしを比較して，

$$\begin{cases} -3k+8=-2tk-20t & \cdots ① \\ 15=-9t & \cdots ② \end{cases}$$

② より，

$$t=-\frac{15}{9}=-\frac{5}{3}$$

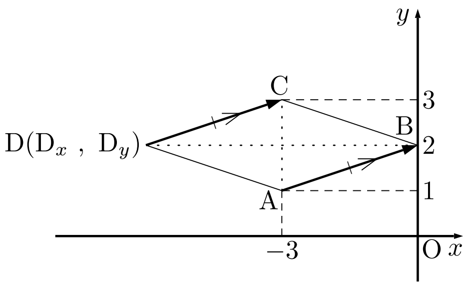
① に代入して，

$$\begin{aligned} -3k+8 &= -2\times\left(-\frac{5}{3}\right)k-20\times\left(-\frac{5}{3}\right) \\ -3k+8 &= \frac{10}{3}k+\frac{100}{3} \\ -9k+24 &= 10k+100 \qquad \text{(両辺に 3 をかけて)} \\ -19k &= 76 \\ \boldsymbol{k} &\boldsymbol{= -4} \end{aligned}$$

問題 006（バリエーション No.1）

座標平面上に平行四辺形 ABCD があり、A$(-3,\ 1)$, B$(0,\ 2)$, C$(-3,\ 3)$ である．
このとき、残りの頂点 D の座標は $\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ であり
この平行四辺形の対角線のうち、長い方の対角線の長さは $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を座標平面上に書き表すと，右図のようになる．
終点 B から始点 A の座標を引くとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分が得られるので



$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (0\ ,\ 2)-(-3\ ,\ 1) \\ &= (0-(-3)\ ,\ 2-1) \\ &= (3\ ,\ 1) \end{aligned}$$

頂点 D$(\mathrm{D_x}\ ,\ \mathrm{D_y})$ とすると，平行四辺形なので $\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ($=(3\ ,\ 1)$)，C$(-3\ ,\ 3)$ より，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{DC}} = (-3\ ,\ 3)-(\mathrm{D_x}\ ,\ \mathrm{D_y}) &= (3\ ,\ 1) \\ (-\mathrm{D_x}\ ,\ -\mathrm{D_y}) &= (3-(-3)\ ,\ 1-3) \\ (-\mathrm{D_x}\ ,\ -\mathrm{D_y}) &= (6\ ,\ -2) \\ (\mathrm{D_x}\ ,\ \mathrm{D_y}) &= \boldsymbol{(-6\ ,\ 2)} \end{aligned}$$

図より，求める対角線の長さは，$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$ なので，

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{BD}}| &= \sqrt{((-6)-0)^2+(2-2)^2} \\
&= \sqrt{6^2} \\
&= \mathbf{6}
\end{aligned}
$$