［コース ID：44］　線形代数 I

44.3　平面ベクトル（内積）

44.3.1　平面ベクトル（内積）

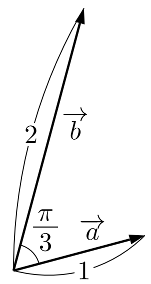
問題 001（バリエーション No.1）

２つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ で $|\overrightarrow{a}|=1$, $|\overrightarrow{b}|=2$ であるとき

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$ $\boxed{ア}$ である。

$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ は，右図のように表せる．内積は

$$\begin{aligned}a\cdot b &= |a||b|\cos\theta\\ &= 1\times 2\times\cos\frac{\pi}{3}\\ &= 1\times 2\times\frac{1}{2}\\ &= \mathbf{1}\end{aligned}$$



問題 002（バリエーション No.1）

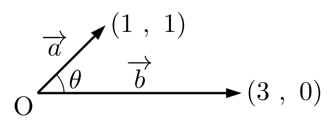
２つのベクトル $\overrightarrow{a}=(1,\ 1)$, $\overrightarrow{b}=(3,\ 0)$ のなす角を求めよ。

解答は以下のなかから選び、その番号を $\boxed{ア}$ へマークせよ。

⓪ 0　① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{\pi}{2}$　⑤ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑥ $\dfrac{3}{4}\pi$　⑦ $\dfrac{5}{6}\pi$　⑧ π

$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ は，右図のように表せる．
内積を成分計算する場合，2 つのベクトルの (x 成分どうしの積)+ (y 成分どうしの積) で表せるので，

$$\begin{aligned}a\cdot b &= 1\times 3\ +\ 1\times 0\\ &= 3\ +\ 0\\ &= 3 \qquad \cdots ①\end{aligned}$$



また，内積は 2 つのベクトルの大きさとなす角 θ からも計算できるので，

$$\begin{aligned}a\cdot b &= |a||b|\cos\theta\\ &= \sqrt{1^2+1^2}\times\sqrt{3^2+0^2}\times\cos\theta\\ &= \sqrt{2}\times 3\times\cos\theta\\ &= 3\sqrt{2}\cos\theta \quad \cdots ②\end{aligned}$$

② が ① に等しいので

$$3\sqrt{2}\cos\theta = 3$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって

$$\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

【答】 ②

問題 003（バリエーション No.1）

$|\overrightarrow{a}| = 2,\ \ |\overrightarrow{b}| = 1,\ \ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = -1$ のとき、内積

$$(-3\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b})\cdot(-5\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}) = \boxed{\text{アイ}}$$

である。

与式を展開すると，

$$\begin{aligned}(-3\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b})\cdot(-5\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}) &= 15\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} - 6\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + 15\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} - 6\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} \\ &= 15|\overrightarrow{a}|^2 + 9\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} - 6|\overrightarrow{b}|^2 \qquad (\because\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2\text{より})\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{a}| = 2,\ \ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = -1,\ \ |\overrightarrow{b}| = 1$ を代入して

$$\begin{aligned}15|\overrightarrow{a}|^2 + 9\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} - 6|\overrightarrow{b}|^2 &= 15\times 2^2 + 9\times(-1) - 6\times 1^2 \\ &= 60 - 9 - 6 \\ &= \mathbf{45}\end{aligned}$$

問題 003（バリエーション No.11）

$|\overrightarrow{a}| = 1,\ \ |\overrightarrow{b}| = 2,\ \ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 3$ のとき、内積

$$|\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}|^2 = \boxed{\text{アイ}}$$

である。

与式を展開し，$|\overrightarrow{a}| = 1,\ \ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 3,\ \ |\overrightarrow{b}| = 2$ を代入して

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}|^2 &= |\overrightarrow{a}|^2 + 4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + 4|\overrightarrow{b}|^2 \\ &= 1^2 + 4\times 3 + 4\times 2^2 \\ &= 1 + 12 + 16 \\ &= \mathbf{29}\end{aligned}$$

問題 004（バリエーション No.1）

$|\overrightarrow{a}|=2,\ |\overrightarrow{b}|=3,\ |\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=4,\ \overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とするとき、

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad \cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}},$

$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\sqrt{\boxed{\text{キク}}}$ である。

$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=4$ を各辺二乗すると，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2&=4^2\\ |\overrightarrow{a}|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2&=16\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{a}|=2,\ |\overrightarrow{b}|=3$ だから，

$$\begin{aligned}2^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+3^2&=16\\ 4-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+9&=16\\ -2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}&=3\\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}&=\mathbf{\frac{-3}{2}}\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ なので，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta&=\frac{-3}{2}\\ 2\times3\times\cos\theta&=\frac{-3}{2}\\ \cos\theta&=\mathbf{\frac{-1}{4}}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$ を二乗すると，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2&=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2\\ &=2^2+2\times\frac{-3}{2}+3^2\\ &=4-3+9\\ &=10\end{aligned}$$

よって

$$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\sqrt{\mathbf{10}}$$