［コース ID：44］　線形代数 I

44.12　空間ベクトル（球の方程式）

44.12.1　空間ベクトル（球の方程式）

問題 001（バリエーション No.1）

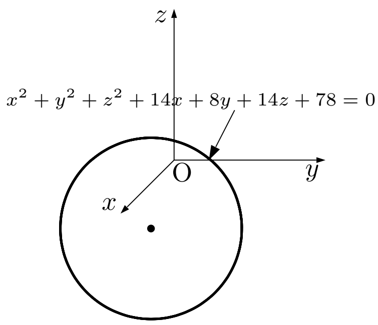
以下の方程式

$$x^2+y^2+z^2+14x+8y+14z+78=0$$

は球面を表し、その中心の座標は $\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウエ}},\ \boxed{\text{オカ}}\right)$、半径は $\boxed{\text{キ}}$ である.

半径 r の 中心の座標 $(a,\ b,\ c)$ の球の方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ の形に与式を変形する.

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+14x+8y+14z+78&=0\\ (x+7)^2-7^2+(y+4)^2-4^2+(z+7)^2-7^2+78&=0\\ (x+7)^2+(y+4)^2+(z+7)^2&=36\\ \{x-(\mathbf{-7})\}^2+\{y-(\mathbf{-4})\}^2+\{z-(\mathbf{-7})\}^2&=\mathbf{6}^2 \end{aligned}$$



【答】　中心の座標 $(\mathbf{-7},\ \mathbf{-4},\ \mathbf{-7})$，半径 $\mathbf{6}$

問題 002（バリエーション No.1）

２点 $\mathrm{A}(-2,\ -7,\ -10)$，$\mathrm{B}(-10,\ -3,\ -2)$ を直径の両端とする球面の方程式は

$$x^2+y^2+z^2+\boxed{\text{アイ}}\,x+\boxed{\text{ウエ}}\,y+\boxed{\text{オカ}}\,z+\boxed{\text{キク}}=0$$

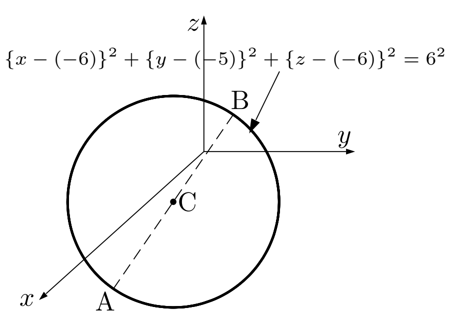
である.

AB の中点が，球の中心となるので，その座標を C $(x_c,\ y_c,\ z_c)$ として，

$$\begin{aligned}(x_c,\ y_c,\ z_c)&=\left(\frac{(-2)+(-10)}{2},\frac{(-7)+(-3)}{2},\frac{(-10)+(-2)}{2}\right)\\ &=(-6,\ -5,\ -6)\end{aligned}$$

また，AB が直径なので，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を求めると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(-10,\ -3,\ -2)-(-2,\ -7,\ -10)\\ &=(-8,\ 4,\ 8)\end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| &= \sqrt{(-8)^2+4^2+8^2} \\
&= \sqrt{144} \\
&= 12
\end{aligned}
$$

よって，半径を r として，$r = 12 \div 2 = 6$ なので，球の方程式に代入して

$$
\begin{aligned}
(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2 &= r^2 \\
\{x-(-6)\}^2+\{y-(-5)\}^2+\{z-(-6)\}^2 &= 6^2 \\
x^2+12x+36+y^2+10y+25+z^2+12z+36 &= 36
\end{aligned}
$$

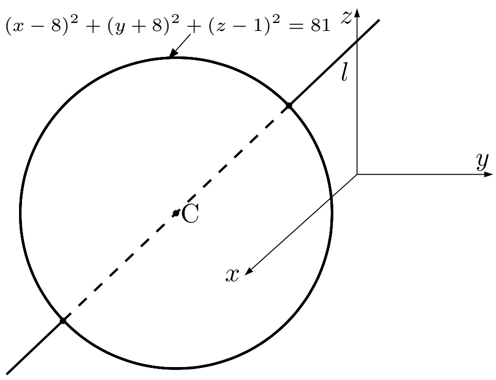
$$\therefore\quad x^2+y^2+z^2+\mathbf{12}x+\mathbf{10}y+\mathbf{12}z+\mathbf{61}=0$$

問題 003（バリエーション No.1）

球面

$$C:(x-8)^2+(y+8)^2+(z-1)^2=81$$

がある．C の中心を通り，$\overrightarrow{n}=(-7,\ 4,\ 4)$ に平行な直線 l と，C との交点の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$ および $\left(\boxed{\text{オカ}},\ \boxed{\text{キクケ}},\ \boxed{\text{コサ}}\right)$ である．



C の中心は，$(8,\ -8,\ 1)$ なので，この点を通り，方向ベクトルが $(-7,\ 4,\ 4)$ の直線 l 上の点 $\mathrm{P}\,(x,\ y,\ z)$ の座標を媒介変数 t を用いて表すと

$$
\begin{aligned}
(x,\ y,\ z) &= (8,\ -8,\ 1)+t(-7,\ 4,\ 4) \\
&= (8-7t,\ -8+4t,\ 1+4t)
\end{aligned}
$$

これらを球の方程式に代入して t を求めると，

$$
\begin{aligned}
\{(8-7t)-8\}^2+\{(-8+4t)+8\}^2+\{(1+4t)-1\}^2 &= 81 \\
(-7t)^2+(4t)^2+(4t)^2 &= 81 \\
49t^2+16t^2+16t^2 &= 81 \\
81t^2 &= 81 \\
t^2 &= 1 \\
t &= \pm 1
\end{aligned}
$$

$t=\pm 1$ を媒介変数表示した P 点の座標に代入して，

$t=1$ のとき　$(8-7\times 1,\ -8+4\times 1,\ 1+4\times 1)=(\mathbf{1},\ \mathbf{-4},\ \mathbf{5})$

$t=-1$ のとき　$(8-7\times(-1),\ -8+4\times(-1),\ 1+4\times(-1))=(\mathbf{15},\ \mathbf{-12},\ \mathbf{-3})$

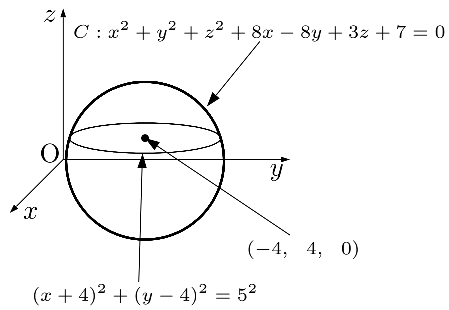
問題 004（バリエーション No.1）

球面

$$C : x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 8y + 3z + 7 = 0$$

を考える．C の xy 平面による切り口の円の中心は $\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$，半径は $\boxed{\text{オ}}$ である．

xy 平面においては $z = 0$ なので，球の方程式 C に $z = 0$ を代入して，変形すると



$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 8x - 8y + 7 &= 0 \\
(x+4)^2 - 4^2 + (y-4)^2 - 4^2 + 7 &= 0 \\
(x+4)^2 + (y-4)^2 &= 5^2
\end{aligned}
$$

これは，$z = 0$ 平面上で，x 座標 -4，y 座標 4 を中心とする，半径 5 の円の方程式である．

【答】　円の中心 $(\mathbf{-4,\ 4,\ 0})$，半径 **5**